

PRIMER CURSO  
DE  
ECUACIONES  
EN  
DERIVADAS  
PARCIALES

IRENEO PERAL ALONSO  
Catedrático de Análisis Matemático  
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS  
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID



## DEDICATORIA

*A mi mujer, Magdalena,  
y a mis hijas, Irene y Magdalena,  
simplemente, porque las quiero y ellas son lo más importante para mí.*

Typeset by  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\text{\TeX}$



# INDICE

Lista de símbolos	9
Prólogo	11
CAPÍTULO 1 : LOS EJEMPLOS CLÁSICOS DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE LA FÍSICA MATEMÁTICA	
Introducción.	15
§1.1 La divergencia. Una manera de medir variaciones.	17
§1.2 El teorema de la divergencia de Gauss.	24
§1.3 Ecuaciones de difusión: La ecuación del calor.	33
§1.4 Ecuaciones estacionarias: Las ecuaciones de Laplace y de Poisson	38
§1.5 Ecuación de la cuerda vibrante.	40
§1.6 Ecuaciones de Maxwell. La ecuación de ondas.	42
§1.7 Ecuaciones de primer orden. Euler y las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos.	47
§1.8 Otros modelos físicos.	51
Ejercicios del Capítulo 1.	53
CAPÍTULO 2: ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE PRIMER ORDEN: EL PROBLEMA DE CAUCHY	
Introducción.	55
§2.1 Ecuaciones <i>quasi lineales</i> de primer orden	57
§2.2 Ecuación general de primer orden.	70
§2.3 Clasificación de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.	84
§2.4 El teorema de Cauchy-Kovalevsky.	94
Apéndice al Capítulo 2.	
Problema de Cauchy para la ecuación general de primer orden en $\mathbf{R}^N$ .	102
Ejercicios del Capítulo 2.	106
CAPÍTULO 3: PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE. SERIES E INTEGRALES DE FOURIER. MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES.	
Introducción.	113
§3.1 Problemas de contorno de segundo orden.	
Teorema de la alternativa. Función de Green.	118
§3.2 Problemas autoadjuntos: El problema de Sturm-Liouville. Autovalores.	132
§3.3 El problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el disco unidad de $\mathbf{R}^2$ .	
Convergencia de series de Fourier.	153

§3.4 Problemas mixtos para la ecuación del calor en una dimensión espacial.	175
§3.5 Problemas de contorno para la ecuación de ondas: la cuerda vibrante.	184
§3.6 El problema de Dirichlet en el semiplano positivo.	
La transformación de Fourier.	188
Ejercicios del Capítulo 3.	201
CAPÍTULO 4: LA ECUACIÓN DE ONDAS EN DIMENSIONES ESPACIALES UNO DOS Y TRES. EL PROBLEMA DE CAUCHY.	
Introducción.	211
§4.1 La ecuación de ondas en dimensión uno. Fórmula de D’Alambert.	213
§4.2 La ecuación de ondas en dimensión espacial tres.	
Método de las medias esféricas.	216
§4.3 El problema de Cauchy en dimensión espacial dos.	
Método de descenso de Hadamard.	222
§4.4 La ecuación de ondas no homogénea.	224
§4.5 Energía y unicidad. Dependencia de la ecuación de ondas de la dimensión.	226
Ejercicios del Capítulo 4.	234
CAPÍTULO 5: LA ECUACIÓN DE LAPLACE. EL PROBLEMA DE DIRICHLET.	
Introducción.	239
§5.1 Representación integral de funciones. Función de Green.	241
§5.2 El problema de Dirichlet en una bola de $\mathbf{R}^N$ .	246
§5.3 Cálculo de la función de Green en dominios con simetrías	251
§5.4 Propiedades de las funciones armónicas.	254
§5.5 El problema de Dirichlet en dominios generales. Método de Perron.	261
§5.6 La ecuación de Poisson.	275
Ejercicios al Capítulo 5.	283
CAPÍTULO 6: LA ECUACIÓN DEL CALOR.	
Introducción.	291
§6.1 Núcleo de Gauss. Construcción de soluciones.	293
§6.2 El principio del máximo. Resultados clásicos de unicidad.	299
§6.3 El problema de Cauchy no homogéneo.	303
§6.4 Temperaturas positivas.	312
Ejercicios del Capítulo 6	319
Índice Alfabético	327
Bibliografía	333

# LISTA DE SIMBOLOS

- $\mathbf{R}$  Números reales
- $\mathbf{R}^N$  Espacio euclídeo N-dimensional
- $\mathbf{R}^3$  Espacio euclídeo 3-dimensional
- $\mathbf{R}^2$  Espacio euclídeo 2-dimensional
- $\mathbf{R}_+^2$  Semiplano con segunda coordenada positiva
- $\mathbf{R}_+^{N+1}$  Semiespacio con la última coordenada positiva
- $\mathbf{Q}$  Números racionales
- $\mathbf{C}$  Números complejos
- $\mathbf{N}$  Números naturales
- $\mathbf{Z}$  Números enteros
- $A \times B$  Producto cartesiano de  $A$  y  $B$ .
- $\mathcal{C}^\infty$  Funciones indefinidamente diferenciables
- $\mathcal{C}_0^\infty$  Funciones indefinidamente diferenciables y con soporte compacto.
- $\mathcal{C}$  Funciones continuas
- $\mathcal{C}^1$  Funciones con primeras derivadas continuas
- $\mathcal{C}^2$  Funciones con segundas derivadas continuas
- $\mathcal{C}^3$  Funciones con terceras derivadas continuas
- $\mathcal{C}^k$  Funciones con  $k$  derivadas continuas
- $\mathcal{C}^\alpha$  Funciones Holderianas
- $L^2$  Funciones de cuadrado integrable
- $\Im$  Parte imaginaria
- $\Re$  Parte real
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  Producto escalar canónico en  $\mathbf{R}^N$ .



# PROLOGO

*Cualquier texto sobre una materia clásica de las Matemáticas es siempre producto de un punto de vista personal del autor sobre la disciplina en cuestión. Este no es una excepción.*

*Debo confesar que la organización de las lecciones que siguen a continuación, es como me hubiera gustado aprender ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES por primera vez. Y, no cabe duda, éste es mi gusto actual, el cual es seguramente distinto de cuando escuché por primera vez hablar de esta vasta y apasionante parcela de las Matemáticas.*

*No deben esperarse contenidos originales en una materia tan clásica, ¡sería peligroso...!*

*He pretendido buscar los conocimientos que considero realmente básicos para un estudiante motivado y curioso de las Matemáticas, de su gestación y de cómo sirven para describir algunos procesos naturales con singular finura.*

*Lo que yo considero básico puede resumirse en los siguientes puntos:*

- (1) *Entender bien los resultados más elementales en los tres ejemplos clásicos de las ecuaciones de la Física Matemática: ECUACIÓN DE ONDAS, ECUACIÓN DEL CALOR Y ECUACIÓN DE LAPLACE.*
- (2) *Conocer, siquiera someramente, las ECUACIONES DE PRIMER ORDEN, su interpretación geométrica y su uso para determinar LOS BUENOS PROBLEMAS para las ecuaciones de segundo orden.*
- (3) *El MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES, como origen de la disciplina, y tema central del curso, es decir, manipular las series de Fourier para poder leer en ellas propiedades de las soluciones. En este sentido, es útil conocer los problemas de Sturm-Liouville y sus autovalores.*
- (4) *Convencer al lector de que la inversión de esfuerzo y tiempo que se hace en los apartados anteriores es muy rentable.*

*Lo que se hace para los tres ejemplos más elementales se convierte en métodos muy generales que, con desarrollos técnicos más sofisticados, permiten estudiar las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden lineales e incluso algunos problemas no lineales. Estos métodos han sido el motor de buena parte de las Matemáticas de los dos últimos siglos.*

*Me gusta enfatizar en este punto, pues recuerdo no sin cierto desasosiego, la impresión que me producían las ecuaciones en derivadas parciales al estudiarlas por primera vez. Estudiar problema tras problema, ahora con valores iniciales, ahora con*

valores de contorno, una ecuación de este tipo, luego se la cambia un signo y su comportamiento no se parece en nada... ¿Verdad que parece un desastre?

Insisto, los ejemplos que estudiaremos en lo que sigue son **paradigmáticos**. Y trataré de dar cuenta de por qué lo son; no solo las ecuaciones, sino también, el tipo de problema que para cada una se estudia. Intentaré mostrar los hechos fundamentales en cada caso, buscando el camino que, a mi juicio, tiene más proyección y más uso en desarrollos avanzados.

El origen de este texto está en la necesidad de tener una referencia de carácter elemental, más o menos autocontenida, que me sirva a mí mismo como guía de los cursos que he de dar. No obstante, es posible que sea de interés para alguien más que tenga que dar un curso de introducción y para los estudiantes. De ahí el esfuerzo, un poco masoquista, que he emprendido de ponerlo en AMSTEX. No puedo agradecer la estupenda labor de mecanografía, porque sería un autoagradecimiento injusto, ya que lo bien que queda no es mérito mío, sino del TEX.

No pienso dar indicaciones metodológicas, siempre me ha causado un cierto espanto enseñar a enseñar. Pero sí diré lo que vengo haciendo con el contenido del texto en un cuatrimestre de cuatro horas semanales de clase.

En las condiciones anteriores, el curso 1992-93, se cubrieron:

- El Capítulo 1 esencialmente completo.
- El Capítulo 2 salvo el teorema de Cauchy-Kovalevsky.
- Del Capítulo 3 se suprimió la transformada de Fourier pero el resto se estudió con detalle.
- El Capítulo 4 se estudió completo.
- Del Capítulo 5 se estudió la parte más elemental, es decir, se omitieron, la solución del problema de Dirichlet en dominios generales por el método de Perron, la cual se explicó sin demostraciones, y los resultados de teoría del potencial elemental.
- Del Capítulo 6 se obtuvieron las soluciones mediante la gaussiana, que se obtuvo como solución autosemejante, y se mostró unicidad de solución acotada por aplicación del principio del máximo.

También hice buena parte de los ejercicios propuestos. Todo esto es lo que yo considero el PRIMER CURSO EN ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. El resto es para los estudiantes mejores y les servirá como paso intermedio para leer otros textos más avanzados, tales como los que aparecen en las referencias.

Tuvimos el año 1992-93 ¡370 estudiantes de E.D.P! Esta fue una razón más para redactar estas lecciones. Quiero agradecer al pequeño grupo, el más activo, de este colectivo excesivo, su interés por las Matemáticas, pues ello me hizo trabajar duro y con ilusión en culminar la empresa de redactar este texto.

Es de justicia el reconocimiento a mis colegas del Departamento de Matemáticas, en especial a los que dedican su tiempo a las "EDP": Bernis, Esteban, García Azorero, Vázquez y Walías, porque de sus comentarios y sugerencias aprendo continuamente. Pero en general a todos los compañeros del Departamento les debo gratitud. A unos por los ánimos que me dieron, a otros por "pasar de mí" y dejarme en paz.

*Mi más profundo agradecimiento a Dimitri Yakubovich, con quien compartí la enseñanza de este curso, por la ayuda que me prestó. Sus correcciones y comentarios han sido de utilidad para hacer legible este texto. Las conversaciones con Jesús Gonzalo, que enseñó el tercer grupo, siempre fueron interesantes para mí por sus peculiares y profundos puntos de vista. También debo gratitud a A. de la Llave y M. Walias por la lectura de las versiones previas, por sus severas críticas, que han hecho que disminuyan las erratas de manera exponencial.*

*Recibiré con gratitud todo comentario, crítica, apunte, sugerencia, chascarrillo, etc., que los lectores tengais a bien hacer y que vayan en el camino de la mejora de este curso.*

*Los símbolos más usados están recogidos tras el índice.*

*Se incluye una lista de referencias bibliográficas de la que debo advertir que son todos los que están pero, evidentemente, no están todos los que son. La selección ha sido hecha por gusto personal del autor y por aproximación al nivel del texto. Algunas de ellas serían la continuación natural de estas lecciones.*

*Gracias, ánimo y que la Divina Providencia nos conserve a todos el buen humor, que buena falta nos hace.*

Madrid, Otoño de 1993  
*Ireneo Peral Alonso*

## NOTA A LA EDICION ELECTRONICA.

*He recibido gran número de sugerencias y comentarios positivos al texto por parte de colegas de diversas universidades españolas. A todos mi agradecimiento. Me ha alegrado saber que el esfuerzo realizado ha servido para algo y ha sido un acicate para hacer una corrección de erratas exhaustiva.*

*Especial gratitud merecen los profesores García Azorero y Walias, de la Universidad Autónoma de Madrid, quienes generosamente me han hecho llegar las erratas detectadas por ellos.*

*El final de existencias y la posterior descatalogación del libro por parte de Pearson, actual propietaria de Addison-Wesley, editora del libro conjuntamente con la Universidad Autónoma de Madrid, y habiéndome pedido acceso al libro numerosos colegas de Iberoamerica, me han llevado a la decisión de poner el libro para libre acceso de estudiantes y profesores de todo el mundo.*

*Aviso que no hay cambios en el contenido sobre la edición escrita. He tratado solamente de corregir las numerosas erratas advertidas, aclarar alguna frase y añadir media docena de nuevos ejercicios.*

Madrid, Otoño de 2001  
*Ireneo Peral Alonso*

