CAPITULO 6

LA ECUACION DEL CALOR

Introducción

La ecuación del calor,

$$u_t - \Delta u = F(x,t),$$

es el modelo más sencillo de ecuación de difusión y fue obtenida en la sección 1.3 con detalle. Hemos visto en la sección 2.3 cómo el problema de Cauchy para la ecuación del calor con datos en $t = 0$ es un problema característico. En la sección 3.4 se ha estudiado el comportamiento de la difusión de calor en un medio unidimensional, advirtiendo que se trata de un modelo *irreversible* y viendo cómo la ecuación del calor *mejora* los datos, es decir, tiene efecto *regularizante.*

En este capítulo se proyecta estudiar el problema de Cauchy en $\mathbf{R}^N$ comprobando que es compatible, si bien es necesaria una condición *unilateral* para obtener solución única, por ser característico .

A fin de poder demostrar resultados de unicidad se establecerá el *principio del máximo para la ecuación del calor.*

La obtención de la *solución fundamental* es el objeto de la primera sección. Con ella obtendremos una solución del problema de Cauchy homogéneo. Se estudia también un contraejemplo de Tychonoff que pone de manifiesto la no unicidad.

La sección 6.2 se dedica a estudiar el principio del máximo en dominios acotados y a los teoremas de unicidad más simples.

La solución del problema no homogéneo será el objeto de la sección tercera y en la sección cuarta se estudiará el resultado general de unicidad de Widder. Esta última sección se puede reducir en una primera lectura a informarse del resultado, obviando las demostraciones.

Se cierra el capítulo con un apartado de ejercicios.

6.1.- Núcleo de Gauss. Construcción de soluciones.

Al igual que se ha hecho en la ecuación de Laplace, tratamos de obtener soluciones de la ecuación del calor que son singulares en el origen.

Empezaremos por el caso de dimensión espacial uno que es más sencillo de escribir, y en el que usaremos un argumento de *homogeneidad frente al cambio de escala*, que reduce el problema a una ecuación ordinaria.

El uso de la transformación de Fourier nos permitirá obtener la *solución fundamental* en dimensiones mayores.

A) En el caso de dimensión $N = 1$, hay un camino muy elemental de obtener la *solución fundamental*.

Buscaremos soluciones *autosemejantes*, es decir, soluciones que *al cambiar la escala convenientemente* permanecen invariantes. Más precisamente, la escala *conveniente* queda determinada observando que en la ecuación del calor hay una derivada en el tiempo y dos en el espacio. Con esta observación, hacemos el cambio de escala $x = \lambda^\alpha y$, $t = \lambda^\beta s$ y consideramos para una solución u,

$$v(y,s) = u(\lambda^\alpha y, \lambda^\beta s) = u(x,t).$$

Para que v sea solución hemos de tener,

$$v_s - v_{yy} = 0$$

pero si calculamos,

$$v_s - v_{yy} = \lambda^\beta u_t - \lambda^{2\alpha} u_{xx},$$

de forma que si $\beta = 2\alpha$ tenemos,

$$v_s - v_{yy} = \lambda^\beta (u_t - u_{xx}) = 0.$$

Como consecuencia, parece natural buscar soluciones que respeten la homogeneidad observada, es decir, soluciones que dependan de la variable $\xi = \dfrac{x}{\sqrt{t}}$. La forma de una tal función, será,

$$u(x,t) = t^\alpha f(\frac{x}{\sqrt{t}}).$$

Imponiendo que u verifique la ecuación, $u_t - u_{xx} = 0$, se debe tener,

$$f''(\xi) + \frac{\xi}{2} f'(\xi) - \alpha f(\xi) = 0,$$

donde $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$. Desde el punto de vista físico se sabe que hay que imponer la conservación de la cantidad de calor. Normalizando se traduce en,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} t^\alpha f(\frac{x}{\sqrt{t}})dx = 1,$$

es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{\alpha} f(\frac{x}{\sqrt{t}})dx = t^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = 1,$$

por tanto, necesariamente se ha de tener $\alpha = -\frac{1}{2}$. La ecuación ordinaria puede escribirse como

$$(2f' + \xi f)' = 0.$$

Tomamos en particular las soluciones de

$$2f' + \xi f = 0, \quad \text{es decir,} \quad f(\xi) = ce^{-\frac{|\xi|^2}{4}},$$

que para que tenga integral uno, debe ser,

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

núcleo de Gauss, que es la *solución fundamental* buscada.

La justificación del nombre quedará clara en unas pocas líneas.

El método es extensible a más dimensiones. Se omiten más detalles, pues tenemos un método alternativo que estudiamos a continuación.

B) Consideremos el problema

$$(6.1.1) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbf{R}^N, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N). \end{cases}$$

Recordamos que $\mathcal{S}$ es el espacio de funciones temperadas introducido en la sección 3.6, en el cual la transformación de Fourier se comporta bien. Si aplicamos la transformación de Fourier en las variable espaciales, es decir,

$$\hat{u}(\xi,t) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-2\pi i \langle x,\xi\rangle} u(x,t)dx,$$

se tiene

$$(6.1.2) \qquad \begin{cases} \hat{u}_t(\xi,t) + 4\pi^2|\xi|^2\hat{u}(\xi,t) = 0, & \xi \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0 \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi). \end{cases}$$

Integrando la ecuación ordinaria en t, considerando ξ como parámetro, se obtiene

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}.$$

Como se trata de una función gaussiana podemos calcular su transformada de Fourier, como se hizo en la sección 3.6, resultando otra gaussiana a la que llamamos *núcleo de Gauss.* Más precisamente

$$\int_{\mathbf{R}^N} e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} d\xi = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Por tanto, en virtud del apartado 3) del teorema (3.6.3) se tiene

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbf{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)dy, \tag{6.1.3}$$

que al ser $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, está bien definida.

Llamando

$$K(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4}},$$

y definiendo

$$K_t(x) = \frac{1}{t^{\frac{N}{2}}} K(\frac{x}{\sqrt{t}}),$$

es decir,

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

se verifica

(1) $K_t(x) > 0$, para todo $x \in \mathbf{R}^N$,

(2) $\int_{\mathbf{R}^N} K_t(x)dx = 1$,

(3) $\lim_{t\to 0} \int_{|x|>\delta>0} K_t(x)dx = 0$.

Las tres propiedades se comprueban de forma inmediata por cálculo directo. (Véase la sección 3.6)

A $K_t(x)$ la llamaremos *solución fundamental* de la ecuación del calor. El siguiente resultado justifica esta denominación.

Observemos que la fórmula (6.1.3) tiene sentido también si, por ejemplo, se supone que $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N)$ y está acotada. Por eso se formula el resultado en el contexto de las funciones continuas.

6.1.1. Teorema.

Sea $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N)$ tal que $|f(x)| < M$ si $x \in \mathbf{R}^N$. Entonces, $u(x,t)$ definida por (6.1.3) verifica

(1) $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^N \times (0,\infty))$,

(2) $u_t - \Delta u = 0$ *si* $x \in \mathbf{R}^N$, $t > 0$,

(3) $\lim\limits_{t\to 0} u(x_0,t) = f(x_0)$ *siendo la convergencia uniforme,*

(4) $|u(x,t)| \leq \sup_{x\in\mathbf{R}^N} |f(x)|$, $(x,t) \in \mathbf{R}^N \times (0,\infty)$.

Demostración.

La demostración es una copia de la hecha con el núcleo de Poisson, ya que $K_t(x)$ es una *aproximación de la identidad.* En efecto, los apartados 1) y 2) resultan de la deducción de K_t y pueden comprobarse también por cálculo directo sin grandes dificultades. La conclusión 4) resulta directamente de la propiedad 2) para el núcleo de Gauss K_t.

En cuanto a 3) para $x_0 \in \mathbf{R}^N$, escribimos

$$|u(x_0,t) - f(x_0)| = |\int_{-\infty}^{\infty} K_t(x_0 - y)(f(y) - f(x_0))dy|. \tag{6.1.4.}$$

Por la continuidad de f, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|y-x_0| < \delta$, $|f(y)-f(x_0)| < \varepsilon$; entonces en (6.1.4) resulta

(6.1.5.)

$$|u(x_0,t)-f(x_0)| \leq \varepsilon \int_{|x_0-y|<\delta} K_t(x_0-y)dy + 2 \sup_{x\in\mathbf{R}^N} |f(y)| \int_{|x_0-y|>\delta} K_t(x_0-y)dy \leq 2\varepsilon,$$

en virtud de las propiedades del núcleo K. $\square$

Ejemplo de Tychonoff: No unicidad de solución del Problema de Cauchy para la ecuación del calor.

Como se estudió en el capítulo 2, el problema (6.1.1) es *característico*, por lo que sin condiciones adicionales no es de esperar unicidad. Así lo pone de manifiesto el ejemplo debido a Tychonoff que se analiza a continuación.

Consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in \mathbf{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = 0 \end{cases} \tag{6.1.6}$$

que obviamente tiene la solución cero. La idea es usar el problema *no característico*,

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t, \quad (x,t) \in \mathbf{R}^2 \\ u(0,t) = g(t), \quad t \in \mathbf{R} \\ u_x(0,t) = 0, \end{cases} \tag{6.1.7}$$

para buscar soluciones de (6.1.6). Elegiremos $g(t) = 0$ si $t \leq 0$, para conseguir $u(x,0) = 0$ y buscaremos

$$u(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(t) x^j, \tag{6.1.8}$$

para que sea solución.

Suponiendo regularidad suficiente, se deriva término a término en (6.1.8) y se sustituye en la ecuación, obteniéndose

$$\sum_{j=0}^{\infty} g_j'(t)x^j = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)g_j(t)x^{j-2}, \tag{6.1.9}$$

y para verificar los datos en (6.1.7)

$$g_0(t) = g(t), \quad g_1(t) = 0. \tag{6.1.10}$$

De (6.1.9) resulta que para $j \geq 2$,

$$g_j'(t) = (j+1)(j+2)g_{j+2}(t)$$

que, junto a (6.1.10) da

i) Si $j = 2k+1$, $g_j = 0$.

ii) Si $j = 2k$,

$$g_{2k}(t) = \frac{1}{(2k)!}\frac{d^k g}{dt^k}(t).$$

Sustituyendo en (6.1.8) resulta

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\frac{d^k g}{dt^k}(t). \tag{6.1.11}$$

Tras este cálculo formal pasamos a elegir g de forma que se tenga la convergencia necesaria para que (6.1.11) defina una solución clásica de la ecuación del calor.

Para $\alpha > 1$ se toma

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t^{-\alpha}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \tag{6.1.12}$$

De esta forma $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ y $\dfrac{d^k g}{dt^k}(0) = 0$, con lo que se comprueba directamente que se verifica el dato inicial $u(x,0) = 0$. Para estudiar la convergencia de la serie (6.1.11) estimamos el comportamiento de $\dfrac{d^k g}{dt^k}(t)$ como funciones de variable compleja, utilizando la fórmula integral de Cauchy sobre el contorno

$$\Gamma = \{z \in \mathbf{C} | \quad |z-t| = \theta t\},$$

con θ a determinar.

De esta forma se tiene

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\exp(-z^{-\alpha})}{(z-t)^{(k+1)}}dz. \tag{6.1.13}$$

Como para $z \in \Gamma$ se tiene $z = t + \theta t e^{i\phi} = t(1+\theta e^{i\phi})$, resulta

$$\Re(-z^{-\alpha}) = -t^{-\alpha}\Re((1+\theta e^{i\phi})^{-\alpha}).$$

Eligiendo θ tal que

$$\frac{1}{2} < \Re((1+\theta e^{i\phi})^{-\alpha}),$$

obtenemos

$$\Re(-z^{-\alpha}) > -\frac{1}{2}t^{-\alpha}$$

y entonces de (6.1.13) se tiene la estimación siguiente

$$|\frac{d^k g}{dt^k}(t)| \le \frac{k!}{(\theta t)^k}\exp(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}), \quad t > 0. \tag{6.1.14.}$$

Sustituyendo las estimaciones (6.1.14) en (6.1.11), tenemos

$$\begin{aligned} &|u(x,t)| \le \\ &\sum_{k=0}^{\infty}|\frac{d^k g}{dt^k}(t)|\frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \le \\ &\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{(\theta t)^k}\exp(-\frac{1}{2}t^{-\alpha})\frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \le \\ &(\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{|x|^2}{(\theta t)})^k\frac{1}{k!})\exp(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}) = \exp(\frac{x^2}{\theta t} - \frac{t^{-\alpha}}{2}). \end{aligned} \tag{6.1.15}$$

La desigualdad (6.1.15) prueba la sumabilidad de la serie y, por tanto, que u es una función continua. Derivando término a término se comprueba la derivabilidad de u por argumentos análogos. Se dejan al cuidado del lector los detalles.

Como consecuencia hemos obtenido una solución no nula del problema (6.1.6), es decir **no se tiene unicidad**. La solución u no es una función acotada en $\mathbf{R} \times (0, \infty)$.

Este resultado no nos sorprende pues en el capítulo 2 vimos que (6.1.6) es un problema *característico*.

En las secciones que siguen se estudiaran resultados de unicidad cuando se pide que la solución esté en una clase de funciones *adecuada*.

6.2.-El principio del máximo. Resultados clásicos de unicidad.

Comenzamos esta sección estableciendo el principio del máximo débil para el problema de Dirichlet. Como consecuencia, tendremos la prueba de unicidad para el problema (3.4.1) con $B = 0$, estudiado en §3.4.

Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un dominio acotado con frontera regular $\partial\Omega$, y sea $0 < T < \infty$. Definimos $\mathcal{D}_T = \Omega \times (0, T)$ y la *frontera parabólica* de $\mathcal{D}_T$,

$$\Gamma_p \equiv (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T])$$

6.2.1. Teorema.
Supongamos $u \in \mathcal{C}(\bar{\mathcal{D}}_T)$, tal que $u_t, u_{x_i x_j} \in \mathcal{C}(\mathcal{D}_T \cup (\Omega \times \{T\}))$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$ y

$$u_t - \Delta u \leq 0 \quad \textit{en} \quad \mathcal{D}_T = \Omega \times (0, T).$$

Entonces

$$\max_{\Gamma_p} u = \max_{\mathcal{D}_T} u$$

Demostración.
Si se hace la hipótesis adicional

$$u_t - \Delta u < 0 \quad \text{en} \quad \Omega \times (0, T), \tag{6.2.1}$$

el resultado es inmediato. En efecto, si se tuviese que el máximo se alcanza en un punto $(x_0, t_0) \in \mathcal{D}_{T'} \equiv \Omega \times (0, T')$, $T' < T$, habría de verificarse que

$$u_t(x_0, t_0) = 0, \quad \Delta u(x_0, t_0) \leq 0,$$

con lo cual se contradiría (6.2.1). Por consiguiente, en la hipótesis (6.2.1) el máximo no se puede alcanzar en $\mathcal{D}_{T'}$ cualquiera que sea $T' < T$. Si el máximo se alcanzase en $(x_0, T) \in \Omega \times \{T\}$ se tendría

$$u_t(x_0, t_0) \geq 0, \quad \Delta u(x_0, t_0) \leq 0,$$

que contradice también (6.2.1). Por tanto, en la hipótesis (6.2.1), el máximo se alcanza en Γ_p.

Se trata ahora de quitar la hipótesis adicional. Para ello consideramos para cada $\varepsilon > 0$ la función

$$v(x, t) = u(x, t) + \varepsilon |x|^2.$$

Es evidente que la función v goza de la misma regularidad que u, verificando además

$$v_t - \Delta v = u_t - \Delta u - 2N\varepsilon < 0,$$

de acuerdo con las hipótesis sobre u. Entonces puesto que v verifica la hipótesis (6.2.1) concluimos que

$$\max_{\Gamma_p} v = \max_{\mathcal{D}_T} v.$$

Pero entonces,

$$\max_{\mathcal{D}_T} u \leq \max_{\mathcal{D}_T} v = \max_{\Gamma_p} v \leq \max_{\Gamma_p} u + \varepsilon \max_{\Omega} |x|^2.$$

Como es para $\varepsilon > 0$ arbitrario, se tiene

$$\max_{\mathcal{D}_T} u \leq \max_{\Gamma_p} u,$$

que con la desigualdad obvia,

$$\max_{\Gamma_p} u \leq \max_{\mathcal{D}_T} u,$$

prueba el resultado. □

Observamos que el principio del máximo para la ecuación del calor *excluye parte de la frontera*, justamente la frontera temporal en la dirección del tiempo creciente.

Este *principio de máximo* se llama *débil* porque *no excluye que el máximo se tome en un punto interior.*

Como en el caso elíptico, se tiene el llamado *principio del máximo fuerte*, del cual la versión del matemático canadiense y profesor del Courant Institute de New York, *L. Nirenberg*, es válida incluso para una clase de ecuaciones más general.

El resultado para la ecuación del calor es el siguiente.

Principio del máximo fuerte.

Sea u verificando las hipótesis del teorema 6.2.1 en $\mathcal{D}_T$. Si existe $(x_1, t_1) \in \mathcal{D}_T$ tal que

$$u(x_1, t_1) = M = \max_{\bar{\mathcal{D}}_T} u,$$

entonces $u \equiv M$.

La idea de la demostración es establecer un principio de Hopf para la ecuación del calor, análogo al obtenido en la ecuación de Laplace. La longitud de este texto aconseja no dar más detalles sobre este resultado, en tanto que no va a ser usado. Una referencia idónea para estudiar el *principio del máximo fuerte* es el libro de

M.H. Protter, H.F. Weinberger, "Maximum Principles in Differential Equations" Ed. Springer Verlag 1984, al cual remitimos al lector interesado en los detalles.

A continuación aplicamos el *principio del máximo débil* a la obtención de algunos resultados de unicidad.

Sea como antes $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un dominio acotado con frontera regular $\partial\Omega$. Consideremos el problema

$$(P) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

Por aplicación directa del principio del máximo se tiene el siguiente corolario, el cual establece la unicidad para el problema (P).

6.2.2. Corolario.

Sea $u \in \mathcal{C}(\bar{\mathcal{D}}_T)$, tal que $u_t, u_{x_i x_j} \in \mathcal{C}(\mathcal{D}_T \cup (\Omega \times \{T\}))$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$ solución del problema (P). Entonces $u \equiv 0$.

Menos obvia es la segunda consecuencia del principio del máximo débil.

Como hemos visto en la sección anterior el problema de Cauchy (6.1.1), en general, puede tener más de una solución. No obstante, si nos restringimos a ciertas clases de funciones, vamos a poder demostrar la *unicidad.* En esta sección nos limitaremos al ejemplo, muy interesante, de funciones acotadas.

Demostraremos que dentro de la clase de funciones acotadas, el problema (6.1.1) tiene una única solución.

La prueba de este resultado, que formularemos precisamente más tarde, reposa en el principio del máximo; la dificultad está en que en el problema de Cauchy se tiene todo $\mathbf{R}^N$ y no un dominio acotado. En otras palabras, sobre la *"frontera lateral"* de la frontera parabólica, no se tienen condiciones. Esta dificultad se resolverá con el conocimiento de ciertas soluciones explícitas de la ecuación del calor, con las cuales haremos un proceso de comparación.

Es claro que cualquier función de la forma

$$w_\alpha(x,t) = \alpha(2t + \frac{|x|^2}{N}), \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

es una solución de la ecuación del calor en $\mathbf{R}^N \times [0, \infty)$. Estas son las soluciones de la ecuación del calor que usaremos para comparar.

Podemos pasar a establecer el resultado de unicidad con precisión.

6.2.3. Teorema.

Sean u_1, u_2 *soluciones acotadas del problema*

$$(6.2.2) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbf{R}^N, \quad f \quad \textit{continua y acotada} \quad \textit{en} \quad \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

Entonces $u_1 \equiv u_2$.

Demostración.

Si $|u_1(x,t)| \leq M_1$ y $|u_2(x,t)| \leq M_2$, llamamos $M = \max\{M_1, M_2\}$. La función $v = u_1 - u_2$ verifica el problema

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0, & x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0 \\ v(x,0) = 0, & x \in \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

La idea es aplicar a v el principio del máximo como en el corolario (6.2.2). Directamente esto no es posible dado que el dominio es todo $\mathbf{R}^N$; para soslayar esta dificultad consideramos para cada $R > 0$ la bola $|x| < R$ y la función

$$w_R(x,t) = \frac{2NM}{R^2}(2t + \frac{|x|^2}{N}), \quad R \in \mathbf{R},$$

que como hemos visto verifica la ecuación del calor, en particular en $|x| < R, \quad t > 0$. Además

$$w_R(x,0) \geq |v(x,0)| = 0, \text{ y} \qquad w_R(y,t) \geq 2M \geq |v(y,t)|, \quad \text{si} \quad |y| = R, \quad t > 0$$

Aplicando el principio del máximo en el cilindro $|y| \leq R, \quad t \in [0,T]$ a $v - w_R$ y a $w_R - v$, resulta que

$$(6.2.3) \qquad -w_R(x,t) \leq v(x,t) \leq w_R(x,t),$$

para cada (x,t) tal que $|x| \leq R, \quad 0 \leq t \leq T$

Fijo (x,t), la desigualdad (6.2.3) es válida si $R > |x|$. Entonces tomando límite para $R \to \infty$ se tiene

$$v(x,t) = 0$$

Como (x,t) es arbitrario se concluye que

$$v \equiv 0$$

como queríamos demostrar. $\square$

Como consecuencia inmediata podemos formular el importante resultado que sigue.

6.2.4. Corolario.

La única solución **acotada** *del problema (6.1.1) con dato acotado, es dada por la fórmula (6.1.3).*

En la sección 6.4 estudiaremos otros resultados de unicidad, concretamente, los teoremas 6.4.1 y 6.4.5.

6.3.-El problema de Cauchy no homogéneo.

Nos vamos a ocupar del problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F(x,t), \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^N, \end{cases} \tag{6.3.1}$$

donde la regularidad de los datos F y f la suponemos, por el momento, suficiente para que sean ciertos los cálculos que vamos a realizar. Más tarde se estudiarán cuales son las condiciones de regularidad suficientes.

Como en el caso de la ecuación de Laplace un papel importante lo jugará la solución fundamental. Ahora vamos a escribir la solución fundamental con la singularidad desplazada, es decir, consideramos $v(x,t,y,s) \equiv K_{t-s}(x-y)$, es decir,

$$v(x,t,y,s) = \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right), \quad t > s. \tag{6.3.2}$$

Por cálculo directo, o bien, por los argumentos en la sección 6.1 se tiene el siguiente resultado.

6.3.1. Lema.

Sea v definida por (6.3.2), entonces,

i) $v_t - \Delta_y v = 0$ *si* $t > s$.

ii) $v_s + \Delta_y v = 0$ *si* $t > s$.

El apartado i) podemos traducirlo diciendo que fuera de la singularidad la *solución fundamental* verifica la ecuación del calor respecto a t y a y, mientras que el apartado ii) establece que la función v verifica la ecuación del calor "retrógrada" como función de s, y, lo cual es claro por tener s el signo contrario a t. Obsérvese, por último, que el laplaciano se puede tomar también con respecto a x y se sigue verificando el lema.

Un cambio de coordenadas y lo visto en la sección 6.1. permiten escribir la siguiente propiedad importante de la función v.

6.3.2. Lema.
Sea v definida por (6.3.2), entonces

$$\int_{\mathbf{R}^N} v(x,t,y,s)dy = 1, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbf{R}^N \quad y \quad t > s.$$

6.3.3. Lema.
Sea v definida por (6.3.2) y $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un dominio, entonces

$$V(x,t-s) = \int_{\Omega} v(x,t,y,s)dy,$$

verifica

$$\lim_{t-s\to 0} V(x,t-s) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

(Basta aplicar el teorema (6.1.1) a la función característica de Ω).

Supongamos ahora que u es una solución regular del problema (6.3.1) y sea $B_R \subset \mathbf{R}^N$ la bola de centro el origen y radio R.

Observemos que llamando (y,s) las variables de espacio y tiempo respectivamente, se tiene

$$(uv)_s = u_s v + v_s u = v\Delta u - u\Delta v \tag{6.3.3}$$

de acuerdo con el apartado ii) del lema 6.3.1.

Teniendo en cuenta (6.3.3), integrando en $B_R \times (0,t)$ y utilizando la fórmula de Green (5.1.2) en la integral de espacio, obtenemos la siguiente identidad

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_{B_R} vF dyds = \int_0^t \int_{B_R} (u(v_s + \Delta v) - v(\Delta u - u_s))dyds = \\ &\lim_{s\to t^-} \int_{B_R} uvdy - \lim_{s\to 0^+} \int_{B_R} uvdy + \int_0^t \int_{\partial B_R} (v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n})d\sigma(y)ds \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

donde n es la normal exterior a B_R y $d\sigma(y)$ el elemento de superficie sobre ∂B_R.

Si se supone, por ejemplo, que u es acotada, como v y $\dfrac{\partial v}{\partial n}$ decaen exponencialmente cuando $R \to \infty$, pasando al límite en (6.3.4) se obtiene

$$\int_0^t \int_{B_R} vF dyds = \lim_{s\to t^-} \int_{B_R} uvdy - \lim_{s\to 0^+} \int_{B_R} uvdy. \tag{6.3.5}$$

Observamos ahora que según el teorema 6.1.1

$$\lim_{s\to t^-}\int_{B_R} u(y,s)v(x,t,y,s)dy = u(x,t), \tag{6.3.6}$$

y también, por el mismo resultado,
(6.3.7)

$$\lim_{s\to 0^+}\int_{B_R} u(y,s)v(x,t,y,s)dy = \int_{B_R} u(y,0)v(x,t,y,0)dy = \int_{B_R} f(y)v(x,t,y,0)dy,$$

sustituyendo (6.3.6) y (6.3.7) en (6.3.5) obtenemos:

Si u es solución regular del problema (6.3.1), entonces

$$u(x,t) = \int_0^t\int_{B_R} v(x,t,y,s)F(y,s)dyds + \int_{B_R} f(y)v(x,t,y,0)dy. \tag{6.3.8}$$

Sustituyendo el valor de v tenemos,

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\int_0^t\int_{B_R}\frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}}\exp(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)})F(y,s)dyds+ \\ &+\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\int_{B_R} f(y)\exp(-\frac{|x-y|^2}{4t})dy \end{aligned}. \tag{6.3.9}$$

Una vez hecha la conjetura de cómo escribir la solución sólo falta un resultado de *regularidad* en función de la regularidad de F y f que nos permita concluir que la función u definida por (6.3.9) es solución *clásica* del problema (6.3.1). A ello dedicamos el resto de esta sección.

Usaremos el siguiente resultado de regularidad de funciones definidas por una integral

6.3.4. Lema.

Sean Ω_1 y Ω_2 abiertos de $\mathbf{R}^N$.

A) Sea $f : \Omega_1\times\Omega_2 \subset \mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}$ verificando:

i) Para cada $x\in\Omega_1$, la función $y\longrightarrow f(x,y)$ es integrable.

ii) Para cada $y\in\Omega_2$, la función $x\longrightarrow f(x,y)$ es continua.

iii) Existe una función no negativa g integrable en Ω_2 tal que $|f(x,y)|\le g(y)$ para cada $y\in\Omega_2$.

Entonces

$$h(x) = \int_{\Omega_2} f(x,y)dy$$

es continua.

B) Si además f verifica,

iv) Para $y\in\Omega_2$, la función $x\longrightarrow f(x,y)$ tiene derivadas primeras continuas respecto a x_i, $i = 1,...,N$.

v) Existe una función no negativa g integrable en Ω_2 tal que $|\nabla f(x,y)| \le g(y)$ para cada $y \in \Omega_2$.
Entonces,

$$h(x) = \int_{\Omega_2} f(x,y)dy$$

tiene derivadas primeras continuas que además se calculan por la fórmula

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \int_{\Omega_2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)dy, \quad i = 1, ...N \tag{6.3.10}$$

Demostración.
A) Sea $x_0 \in \Omega_1$ y $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$. Entonces consideramos

$$h(x_k) = \int_{\Omega_2} f(x_k,y)dy.$$

Por la hipótesis de continuidad de f, la sucesión de funciones $\{g_k(y) = f(x_k,y)\}_{k\in\mathbf{N}}$ verifica que

$$\lim_{k\to\infty} g_k(y) = f(x_0,y)$$

y por iii) $|g_k(y)| \le g(y)$, por consiguiente podemos aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue para concluir que

$$\lim_{k\to\infty} h(x_k) = \int_{\Omega_2} f(x_0,y)dy,$$

y como es para cualquier sucesión la función h es continua.
B) Sea $\{t_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ una sucesión de números reales tendiendo a cero.
Sea $\{\mathbf{e}_i \mid i = 1,...,N\}$ la base canónica de $\mathbf{R}^N$ y consideremos

$$\frac{h(x+t_k\mathbf{e}_i) - h(x)}{t_k} = \int_{\Omega_2} \frac{1}{t_k}(f(x+t_k\mathbf{e}_i,y) - f(x,y))dy.$$

Por el teorema del valor medio se tiene

$$\frac{h(x+t_k\mathbf{e}_i) - h(x)}{t_k} = \int_{\Omega_2} \frac{\partial f(x+\tau_k(y)\mathbf{e}_i,y)}{\partial x_i}dy,$$

donde $0 < \tau_k(y) < 1$. Por la hipótesis sobre la continuidad de las derivadas parciales de f y la condición v), se verifica

$$\lim_{k\to\infty} \frac{h(x+t_k\mathbf{e}_i) - h(x)}{t_k} = \int_{\Omega_2} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_i}dy,$$

cualquiera que sea la sucesión. Por tanto,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{h(x+t_k\mathbf{e}_i)-h(x)}{t_k} = \int_{\Omega_2} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_i} dy,$$

es decir,

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x_i} = \int_{\Omega_2} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_i} dy,$$

como queríamos demostrar. La continuidad de las derivadas parciales se obtiene del apartado A) del Teorema. $\square$

El resultado que se presenta a continuación da condiciones suficientes para la existencia de solución clásica del problema no homogéneo (6.3.1). Al igual que ocurre en la ecuación de Laplace la sola continuidad del segundo miembro de la ecuación *no es suficiente* para que la solución tenga derivadas segundas. Este extremo lo discutiremos en detalle despúes de establecer el resultado de regularidad que venimos anunciando y que pasamos a detallar.

Recordamos que la solución fundamental para la ecuación del calor es

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \exp(-\frac{|x|^2}{4t}), \quad t>0.$$

6.3.5. Teorema.

Sea $f(x)$ función continua y acotada en $\mathbf{R}^N$ y sean $F(x,t)$ y $\dfrac{\partial F(x,t)}{\partial x_i}$, $\quad i=1,...N$ funciones continuas y acotadas en $\mathbf{R}^N\times(0,T)$, para algún $T>0$.

Entonces la función $u(x,t)$ definida para $(x,t)\in\mathbf{R}^N\times[0,T)$ por

$$u(x,t) = \int_{\mathbf{R}^N} K_t(x-y)f(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} K_{(t-s)}(x-y)F(y,s)dyds, \tag{6.3.11}$$

verifica

(1) $u\in\mathcal{C}(\mathbf{R}^N\times[0,T))$

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial t}\in\mathcal{C}(\mathbf{R}^N\times(0,T))$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\in\mathcal{C}(\mathbf{R}^N\times(0,T))$, $\quad i,j=1,...N$

(3) *u es la única solución acotada del problema (6.3.1).*

Demostración.

Llamamos

$$u_1(x,t) = \int_{\mathbf{R}^N} K_t(x-y)f(y)dy$$

y

$$u_2(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} K_{(t-s)}(x-y)F(y,s)dyds. \tag{6.3.12}$$

Por el teorema 6.1.1. la función u_1 verifica 1) y 2). En particular, de 1) resulta que $u_1(x,0) = f(x)$, y por tanto u_1 es solución del problema homogéneo,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

Basta entonces demostrar que u_2 verifica 1), 2) y es solución del problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F(x,t), \quad x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^N \end{cases}.$$

Haciendo el cambio de variables espaciales $\dfrac{x-y}{2\sqrt{t-s}} = z$ en la integral (6.3.12), resulta

$$\begin{aligned} u_2(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} K_{(t-s)}(x-y)F(y,s)dyds = \\ \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} K_1(z)F(x+2z\sqrt{t-s}, s)dzds. \end{aligned} \tag{6.3.13}$$

El integrando, $h(x,z,t,s) = K_1(z)F(x+2z\sqrt{t-s}, s)$, es continuo en $x, z \in \mathbf{R}^N$ y $0 < s < t$ verificando además que $\nabla_x h(x,z,t,s)$ es continuo y que
(6.3.14)

$$|h(x,z,t,s)| = |K_1(z)F(x+2z\sqrt{t-s}, s)| \le \frac{1}{\pi^{N/2}} e^{-|z|^2} \sup_{(y,\tau)\in\mathbf{R}^N\times[0,T)} |F(y,\tau)|,$$

siendo también

$$|\nabla_x h(x,z,t,s)| \le \frac{1}{2\pi^{N/2}} |z| e^{-|z|^2} \sup_{(y,\tau)\in\mathbf{R}^N\times[0,T)} |F(y,\tau)|, \tag{6.3.15}$$

donde se ha sustituido el valor de $K_1(z)$. Es decir, tanto h como su gradiente respecto a x estan mayorados por funciones integrables. Por consiguiente aplicando el lema (6.3.4) a la función

$$g(x,t,s) = \int_{\mathbf{R}^N} K_1(z)F(x+2z\sqrt{t-s}, s)dz, \tag{6.3.16}$$

resulta que es continua y acotada en $\mathbf{R}^N \times [0,T)$, más concretamente,

$$|g(x,t,s)| \leq M = \sup_{(y,\tau)\in\mathbf{R}^N\times[0,T)} |F(y,\tau)|.$$

Además aplicando el teorema 6.1.1 para $s \to t$, resulta $g(x,t,t) = F(x,t)$.

Por consiguiente se tiene,

i) $u_2 \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N \times [0,T))$

ii) $u_2(x,0) = 0$

iii) La función u_2 es acotada, siendo

$$\sup_{(x,t)\in\mathbf{R}^N\times[0,T)} |u_2(x,t)| \leq MT$$

Aplicando ahora la segunda parte del lema 6.3.4 se tiene que la función u_2 tiene derivadas primeras continuas verificándose

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_i}(x,t) = \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} e^{-|z|^2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x + 2z\sqrt{t-s}, s)dzds,$$

integrando por partes resulta

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_i}(x,t) = \frac{1}{2\pi^{N/2}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}}ds \int_{\mathbf{R}^N} e^{-|z|^2} z_i F(x + 2z\sqrt{t-s}, s)dzds. \tag{6.3.17}$$

Por (6.3.15) se puede aplicar el lema (6.3.4) a (6.3.17) obteniéndose que u_2 tiene derivadas segundas respecto a x continuas en $\mathbf{R}^N \times (0,T)$ y en particular se verifica

$$\Delta u_2(x,t) = \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}}ds \int_{\mathbf{R}^N} e^{-|z|^2} z_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x + 2z\sqrt{t-s}, s)dzds. \tag{6.3.18}$$

Por otro lado, para calcular la derivada con respecto al tiempo t escribimos

$$\frac{u_2(x,t+k) - u_2(x,t)}{k} =$$
$$\frac{1}{k}\int_t^{t+k} g(x,t+k,s)ds + \int_0^t \frac{g(x,t+k,s) - g(x,t,s)}{k}ds \equiv I_1(k) + I_2(k).$$

Por el teorema fundamental del cálculo,

$$\lim_{k\to 0} I_1(k) = g(x,t,t) = F(x,t). \tag{6.3.19}$$

Por el lema (6.3.4), la función $g(x,t,s)$ tiene derivada respecto a t ya que F tiene derivadas parciales respecto a x; además

$$g_t(x,t,s) = \frac{1}{\pi^{N/2}\sqrt{t-s}} \int_{\mathbf{R}^N} e^{-|z|^2} z_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x + 2z\sqrt{t-s}, s)dz$$

y, por tanto, por (6.3.15) se concluye que

$$\lim_{k\to 0} I_2(k) = \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \int_{\mathbf{R}^N} e^{-|z|^2} z_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x + 2z\sqrt{t-s}, s)dzds. \tag{6.3.20}$$

De las igualdades (6.3.18), (6.3.19) y (6.3.20), se concluye que u_2 verifica la ecuación del calor no homogénea, es decir,

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_2 + F,$$

como queríamos demostrar. □

En la sección 5.6, se estudió cómo la continuidad del segundo miembro en la ecuación de Poisson no es suficiente para tener *solución clásica*, es decir con derivadas segundas continuas.

El mismo ejemplo que se consideró allí nos servirá para hacer el análisis en la ecuación del calor no homogénea. Así pues consideremos la función

$$u_0(x) = (x_1^2 - x_2^2)(-\log|x|)^{1/2}, \quad |x| < 1$$

que tiene derivadas primeras continuas pero no derivadas segundas. Sin embargo se vio en §5.6 que tiene laplaciano continuo; lo que ocurre es que se producen cancelaciones entre las derivadas segundas, incluso en $x = 0$. Consideremos la extensión por cero de u_0 a todo $\mathbf{R}^N$, y una función de corte, $\phi(|x|)$, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^N)$, tal que $\phi(|x|) = 1$ si $|x| < \dfrac{1}{2}$ y $\phi(|x|) = 0$ si $|x| > \dfrac{3}{4}$. Definimos $f(x) = \phi(|x|)u_0(x)$ y $F(x) = \Delta f(x)$. Así ambas funciones son continuas y acotadas en $\mathbf{R}^N$ y en $\mathbf{R}^N \times (0,\infty)$ respectivamente.

Es obvio que la función $u(x,t) \equiv f(x)$ es solución acotada, *no clásica*, del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F(x), & x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbf{R}^N. \end{cases} \tag{6.3.21}$$

Que u es solución se entiende como que se verifica la ecuación *punto a punto*. Sin embargo como se vio en la sección §5.6. u no tiene derivadas segundas en el origen.

Hemos de demostrar que (6.3.21) *no tiene solución clásica.*

Supongamos, por el contrario, que existiese $T > 0$ y g solución clásica de (6.3.21) en $\mathbf{R}^N \times (0, T)$. En esta hipótesis se tiene que

$$w = u - g \equiv f(x) - g$$

verifica:

i) $w \in \mathcal{C}^2$ en $0 < |x| < 1$, $0 < t < T$

ii) $w \in \mathcal{C}^1$ en $|x| < 1$, $\dfrac{T}{2} < t < T$ y es solución de

$$\text{(6.3.22)} \qquad \begin{cases} w_t - \Delta w = 0, \\ w(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Probaremos que w es necesariamente $\mathcal{C}^2$ en $|x| < 1$, $T > t > T/2$, con lo cual, por ser $g \in \mathcal{C}^2$, resultaría $u \in \mathcal{C}^2$, lo cual es una contradicción.

Para probar que w tiene derivadas segundas continuas, fijemos (x, t) con $|x| < 1$ y $T/2 < t < T$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \in (0, t - (T/2))$. Sea $v(x, y, t, s)$ definida por (6.3.2). Como se verifica

$$\text{(6.3.23)} \qquad \begin{aligned} &(w(y,s)v(x,y,t,s))_s + \sum_{i=1}^{N}(w(y,s)v_{y_i}(x,y,t,s) - w_{y_i}(y,s)v(x,y,t,s))_{y_i} \equiv \\ &v(w_s - \Delta w) - w(v_s + \Delta v) = 0, \end{aligned}$$

integrando sobre el dominio $\Omega = \{(y, s) |\, \delta < |y| < 1, T/2 < s < t - \varepsilon\}$ con $0 < \delta < |x|$ y aplicando las fórmulas de Green, obtenemos

$$\begin{aligned} &\int_{\delta<|y|<1} w(y, t-\varepsilon)v(x, y, t-\varepsilon, t)dy = \\ &\int_{\delta<|y|<1} w(y, T/2)v(x, y, T/2, t)dy - \\ &\int_{T/2}^{t-\varepsilon}\int_{|y|=1} [w(y,s)\frac{\partial v}{\partial n_y}(x,y,t,s) - \frac{\partial w}{\partial n_y}(y,s)v(x,y,t,s)]d\sigma(y)ds - \\ &\int_{T/2}^{t-\varepsilon}\int_{|y|=\delta} [w(y,s)\frac{\partial v}{\partial n_y}(x,y,t,s) - \frac{\partial w}{\partial n_y}(y,s)v(x,y,t,s)]d\sigma(y)ds \equiv \\ &I_{1,\delta} + I_{2,\varepsilon} + I_{3,\varepsilon,\delta}. \end{aligned}$$

Pasando al límite para $\varepsilon \to 0$ se tiene

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\delta<|y|<1} w(y, t-\varepsilon)v(x, y, t-\varepsilon, t)dy = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbf{R}^N} w(y, t-\varepsilon)\chi_{\delta<|y|-1}(y)v(x, y, t-\varepsilon, t)dy = w(x, t), \end{aligned}$$

por el lema (6.3.3) y el teorema (6.1.1). El resto de los términos son inmediatos por el teorema de convergencia de Lebesgue. Pasando al límite ahora para $\delta \to 0$ concluimos que

$$w(x,t) = \int_{|y|<1} w(y,T/2)v(x,y,t,T/2)dy -$$
$$\int_{T/2}^{t} ds \int_{|y|=1} [w(y,s)\frac{\partial v}{\partial n_y}(x,y,t,s) - \frac{\partial w}{\partial n_y}(y,s)v(x,y,t,s)]d\sigma(y)ds,$$

que implica que $w \in \mathcal{C}^2$ siguiendo la misma argumentación que en la demostración del teorema 6.3.5.

6.4.- Temperaturas positivas.

Esta sección está dedicada a un resultado muy interesante por razones matemáticas y por su significado físico.

Una de las consecuencias del *Segundo Principio de la Termodinámica* es que la *temperatura absoluta* es siempre positiva. Este hecho sugiere que la condición natural a verificar por las soluciones de la ecuación del calor es la condición *unilateral*, $u \geq 0$. Evidentemente es lo mismo suponer $u \geq H$, pues el cambio en la escala de temperaturas $v = u - H$, conduce al caso $v \geq 0$.

Sugerimos al lector recordar las leyes de la termodinámica, para lo cual una hermosa referencia puede ser el celebérrimo curso de R.P. Feynman.

(Véase la versión en español, *R.P. Feynman "Física" Volumen I, Capítulo 44, Addison Wesley Iberoamericana 1987*).

Presentaremos un resultado obtenido en 1944 por D. Widder, profesor de Harvard. Widder prueba que con la condición físicamente natural de que la temperatura sea positiva, el problema de Cauchy para la ecuación del calor tiene una única solución. Desde el punto de vista matemático este resultado es muy interesante, dado que se establece la unicidad con una condición unilateral solamente, es decir, $u(x,t) > 0$.

En realidad, D. Widder probó más cosas, por ejemplo, que una solución de la ecuación del calor que sea positiva y continua, se puede expresar en un tiempo t por la integral de la solución fundamental por el valor de dicha solución en un tiempo anterior. Es decir, la fórmula (6.1.3) caracteriza las soluciones positivas.

Precisaremos estos enunciados en su momento. Antes de nada diremos que la referencia que seguiremos es el trabajo del propio Widder, que se recoge en el libro:

D. Widder, " The heat equation", Academic Press, 1975.

Empezamos estableciendo otro resultado de unicidad, que tiene interés por sí mismo al recoger una hipótesis natural de crecimiento del dato y la solución, y que se usará a continuación. Dicho resultado está en el espíritu del teorema 6.2.3. cambiando la acotación por la ley de crecimiento $|u(x,t)| \leq Ae^{a|x|^2}$. Este crecimiento es el natural, teniendo en cuenta el decaimiento en el infinito de la solución fundamental.

Más precisamente se tiene el siguiente enunciado.

6.4.1. Teorema.
Sea $u \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N \times (0,T)$, verificando el problema
(6.4.1)
$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \quad (x,t) \in \mathbf{R}^N \times (0,T) \\ |u(x,t)| < Me^{a|x|^2}, \text{ para ciertas constantes positivas} M, a, \ (x,t) \in \mathbf{R}^N \times (0,T) \\ u(x,0) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

Entonces $u(x,t) \equiv 0$ para todo $(x,t) \in \mathbf{R}^N \times (0,T)$.

Demostración.
La demostración se hace iterando el resultado sobre intervalos del tiempo de longitud convenientemente pequeña. Para empezar elegimos A tal que $A > a$ y $A > \frac{1}{4T}$.
Consideramos la función

$$v(x,t) = \frac{1}{(1-4At)^{N/2}} e^{\frac{A|x|^2}{(1-4At)}},$$

que como se observa es precisamente

$$v(x,t) = (4\pi)^{N/2} K_{(1+\lambda^2 t)}(\lambda x), \text{ donde} \quad \lambda = i\sqrt{4A} \tag{6.4.2}$$

y $K_t(x)$ es la solución fundamental de la ecuación del calor como se obtuvo en la sección 6.1. Simplemente la regla de la cadena y la expresión (6.4.2) demuestran que $v(x,t)$ es solución de la ecuación del calor en $\mathbf{R}^N \times (0, \frac{1}{4A})$. Además, como para cada $x \in \mathbf{R}^N$, $v(x,t)$ es una función creciente en t, se concluye que

$$v(x,t) \geq v(x,0) = e^{A|x|^2}, \ (x,t) \in \mathbf{R}^N \times (0, \frac{1}{4A}). \tag{6.4.3}$$

Fijado un punto (x_0, t_0) en la banda $\mathbf{R}^N \times (0, \frac{1}{4A})$, elegimos $R > |x_0|$ y tomamos un múltiplo de la función v. Exactamente tomamos

$$w(x,t) = Me^{(a-A)R^2} v(x,t). \tag{6.4.4}$$

Sea ahora el cilindro $D = \{(x,t) | \, |x| < R, \, 0 < t < \frac{1}{4A}\}$ y comparemos las funciones $|u(x,t)|$ y $w(x,t)$ sobre la frontera parabólica de D, es decir, sobre los puntos $(x,0)$, con $|x| < R$ y los puntos (x,t), con $|x| = R$ y $0 \leq t \leq \frac{1}{4A}$. Sobre los primeros, es decir, la base, se tiene

$$|u(x,0)| = 0 < w(x,0) = Me^{(a-A)R^2} e^{A|x|^2} \tag{6.4.5}$$

y sobre la superficie lateral
(6.4.6)
$$|u(x,t)| < Me^{aR^2} \le Me^{(a-A)R^2} v(x,0) \le Me^{(a-A)R^2} v(x,t) = w(x,t), \quad \text{si} \quad |x| = R.$$

Por tanto, aplicando el principio del máximo, teorema 6.2.1, se concluye que

$$-w(x,t) \le u(x,t) \le w(x,t), \quad \text{en}\,(x,t) \in D.$$

En particular,

$$(6.4.7) \qquad |u(x_0,t_0)| < Me^{(a-A)R^2} v(x_0,t_0),$$

que se verifica para todo $R > |x|$. Tomando límites en (6.4.7) cuando $R \to \infty$, obtenemos,

$$u(x_0,t_0) = 0, \qquad \text{cualquiera que sea}\,(x_0,t_0) \in \mathbf{R}^N \times (0, \frac{1}{4A}),$$

ya que hemos elegido $A > a$. Para acabar, repetimos el argumento anterior a la función $u(x, t+\tau)$, con $0 < \tau < \dfrac{1}{4A}$; de esta forma concluimos que $u(x,t) \equiv 0$ en $\mathbf{R}^N \times (0, \dfrac{2}{4A})$. Repitiendo el argumento una cantidad finita de veces, concluimos la prueba. □

En la demostración que haremos del resultado de Widder, se utiliza la siguiente observación de cálculo.

6.4.2. Lema.
Sea $u(x,t)$ solución de la ecuación del calor tal que $u(x,0) = 0$, entonces

$$v(x,t) = \int_0^t u(x,s)ds$$

es solución de la ecuación del calor. Además si u es positiva v es creciente en t para x fijo y v es subarmónica como función de x para t fijo.

Demostración.
En efecto, en primer lugar, $v_t = u$ en virtud del teorema fundamental del cálculo. En segundo lugar,

$$\Delta v(x,t) = \int_0^t \Delta u(x,s)ds = \int_0^t u_s(x,s)ds = u(x,t),$$

por tanto, $v_t = \Delta v$, es decir, v satisface la ecuación del calor.
Si $u \ge 0$ se tiene $v_t = u = \Delta v \ge 0$, por tanto tenemos las propiedades anunciadas para v. □

Necesitaremos el siguiente lema, que viene a establecer que entre todas las posibles soluciones positivas de la ecuación del calor, la más pequeña es la que da la fórmula integral (6.1.3). Este resultado será crucial para probar el resultado de unicidad, y como consecuencia, el teorema de representación de soluciones positivas de Widder.

6.4.3. Lema.

Sea $u \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N \times [0,T))$, *tal que,* $u_t, u_{x_ix_j} \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N \times (0,T))$.

Supongamos que

(1) $u_t - \Delta u = 0$ *en* $\mathbf{R}^N \times [0,T)$

(2) $u(x,t) \geq 0$ *en* $\mathbf{R}^N \times [0,T)$.

Entonces se verifica

$$\int_{\mathbf{R}^N} K_t(x-y)u(y,0)dy \leq u(x,t). \tag{6.4.8}$$

Demostración.

Con las hipótesis que tenemos, lo primero que no está claro es que la integral en (6.4.8) sea finita. Por simplicidad llamaremos $f(x) = u(x,0)$ y consideraremos una función de corte regular, precisamente, $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ verificando,

$$\phi_R(x) = \begin{cases} 1, \quad \text{si} \quad |x| \leq (R-1) \\ R - |x|, \quad \text{si} \quad (R-1) \leq |x| \leq R \\ 0, \quad \text{si} \quad R \geq |x|. \end{cases}$$

Si se define ahora

$$v_R(x,t) = \int_{\mathbf{R}^N} K_t(x-y)f(y)\phi_R(y)dy, \tag{6.4.9}$$

es finita pues $f\phi$ es continua y con soporte en una bola. El teorema 6.1.1 establece que la función v_R definida por (6.4.9) verifica el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_R}{\partial t} - \Delta v_R = 0, \quad (x,t) \in \mathbf{R}^N \times (0,T) \\ v_R(x,t) \geq 0, \quad (x,t) \in \mathbf{R}^N \times (0,T) \\ v_R(x,0) = f(x)\phi_R(x), \quad x \in \mathbf{R}^N. \end{cases} \tag{6.4.10}$$

Sea $M_R = \max\limits_{|y|<R} f(y)$ y sea $|x| > R$, entonces,

$$\begin{aligned} 0 \leq v_R(x,t) &\leq M \int_{|y|<R} K(x-y,t)dy \leq \\ &\leq \frac{M}{\pi^{N/2}} \int_{|y|<R} \frac{1}{|x-y|^N} dy \leq \frac{M}{\pi^{N/2}} \int_{|y|<R} \frac{1}{||x|-|R||^N} dy \leq \\ &\leq \frac{MR^N c_N}{||x|-|R||^N}, \end{aligned} \tag{6.4.11}$$

pues se tiene que $|s|^N e^{-|s|^2} < 1$ y $|x-y| \geq ||x|-R|$ cuando x está en el exterior de la bola de radio R. Por consiguiente, dado $\varepsilon > 0$,

$$0 \leq v_R(x,t) \leq \varepsilon, \qquad \text{si} \qquad |x| \geq \rho(M,R,n). \tag{6.4.12}$$

En particular, tenemos

i) $0 \leq v_R(x,t) \leq \varepsilon + u(x,t)$ si $|x| = \rho$, $0 < t < T$, ya que por hipótesis u es positiva en toda la banda.

ii) $v_R(x,0) \leq f(x) = u(x,0) \leq u(x,0) + \varepsilon$ si $|x| \leq \rho$.

Entonces, i) y ii) junto con el principio del máximo, implican que

$$v_R(x,t) \leq u(x,t) + \varepsilon, \text{ si } |x| < \rho,\ 0 \leq t < T.$$

Además de (6.4.12) y ser $u \geq 0$ se concluye que para todo $\varepsilon > 0$,

$$v_R(x,t) \leq u(x,t) + \varepsilon, \text{ para todo } (x,t) \in \mathbf{R}^N \times (0,T).$$

Si observamos que $v_R(x,t) \leq v_{R'}(x,t)$ y $\phi_R(x) \leq \phi_{R'}(x)$ si $R < R'$ en todo punto x y para $0 \leq t < T$, podemos pasar al límite aplicando el teorema de convergencia monótona, es decir, se tiene,

$$0 \leq v(x,t) = \lim_{R\to\infty} v_R(x,t) = \int_{\mathbf{R}^N} K_t(x-y) f(y) dy \leq u(x,t)$$

que prueba que la integral es finita y, de paso, el lema. $\square$

La siguiente consecuencia consiste en hacer una traslación en el tiempo, pero es útil tenerla escrita con precisión.

6.4.4. Corolario.

Sea u en las hipótesis del lema 6.4.3. Si $t_1 \in (0,T)$, entonces

$$\int_{\mathbf{R}^N} K_t(x-y) u(y,t_1) dy \leq u(x, t+t_1), \quad \textit{si} \quad 0 < t < T - t_1$$

La etapa decisiva de los resultados de Widder viene a continuación.

6.4.5. Teorema.

Sea $u \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N \times [0,T))$, tal que, $u_t, u_{x_i x_j} \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N \times (0,T))$. Supongamos que

(1) $u_t - \Delta u = 0$ *en* $\mathbf{R}^N \times [0,T)$

(2) $u(x,t) \geq 0$ *en* $\mathbf{R}^N \times [0,T)$.

(3) $u(x,0) = 0$ *en* $\mathbf{R}^N$.

Entonces, $u(x,t) \equiv 0$ *si* $(x,t) \in \mathbf{R}^N \times (0,T)$.

Demostración.

Por el lema 6.4.2. se tiene que

$$v(x,t) = \int_0^t u(x,s)ds$$

es solución de la ecuación del calor y al ser $u \geq 0$, $v_t \geq 0$ y $\Delta v \geq 0$. Observamos que si se prueba que, $v(x,t) \equiv 0$, se tiene $u(x,t) \equiv 0$. Por tanto suponemos, sin que ello suponga restricción, que u además verifica

i) $u_t \geq 0$

ii) $\Delta u \geq 0$, es decir, u es subármonica como función de x para t fijo.

Fijamos t_1, $0 < t_1 < T$ y $0 < t_0 < T - t_1$. Por el corolario 6.4.4 se tiene que

$$M = (4\pi t_0)^{N/2} \int\limits_{\mathbf{R}^N} K_{t_0}(y) u(y,t_1)dy \leq (4\pi t_0)^{N/2} u(0, t_0 + t_1) < \infty \tag{6.4.13}$$

Es claro que si $|y| \leq 2|x|$ se tiene

$$(4\pi t_0)^{N/2} K_{t_0}(y) = e^{-\dfrac{|y|^2}{4t_0}} \geq e^{-\dfrac{|x|^2}{t_0}}. \tag{6.4.14}$$

De otra parte, como u es subarmónica se tiene la desigualdad de la media para bolas (5.5.6'), es decir,

$$u(x,t_1) \leq \frac{1}{|B_1||x|^N} \int_{|x-y|\leq|x|} u(y,t_1)dy \leq \frac{1}{|B_1||x|^N} \int_{|y|\leq 2|x|} u(y,t_1)dy, \tag{6.4.15}$$

pues se tiene que la bola de centro x y radio $|x|$ está contenida en la bola de centro el origen y radio $2|x|$. Como consecuencia de (6.4.15) y usando también (6.4.14), concluimos que,

$$\begin{aligned} &|x|^N u(x,t_1) e^{-\frac{|x|^2}{t_0}} \leq \\ &\leq \frac{1}{|B_1|} \int_{|y|\leq 2|x|} e^{-\frac{|y|^2}{4t_0}} u(y,t_1)dy \leq \\ &\leq \frac{1}{|B_1|} (4\pi t_0)^{N/2} \int\limits_{\mathbf{R}^N} K_{t_0}(y) u(y,t_1)dy = \frac{1}{|B_1|} M \equiv M_1. \end{aligned}$$

Es decir, hemos demostrado que

$$0 \leq u(x,t_1) \leq M_1 \frac{e^{-\frac{|x|^2}{t_0}}}{|x|^N} \leq M_1 e^{-\frac{|x|^2}{t_0}},$$

si $|x| > 1$. Como $u(x, t_1)$ es continua para $|x| \leq 1$, está acotada en la bola unidad. Por consiguiente, para una constante conveniente, M_2, se tiene

$$0 \leq u(x, t_1) \leq M_2 e^{-\frac{|x|^2}{t_0}}, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbf{R}^N. \tag{6.4.16}$$

Si ahora se tiene en cuenta que $u_t \geq 0$, concluimos,

$$0 \leq u(x, t) \leq u(x, t_1) \leq M_2 e^{-\frac{|x|^2}{t_0}}, \quad \text{para todo} \quad (x, t) \in \mathbf{R}^N \times (0, t_1).$$

Aplicando el teorema 6.4.1 resulta $u(x, t) \equiv 0$ en la banda $\mathbf{R}^N \times (0, t_1)$. Como tanto t_0 y t_1 son arbitrarios se prueba el teorema. $\square$

Para finalizar este apartado obtendremos una consecuencia importante del teorema 6.4.5 que mejora el lema 6.4.3, estableciendose la representación de las soluciones positivas de la ecuación del calor como la integral de Gauss del valor inicial.

6.4.6. Teorema.
Sea $u \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N \times [0, T))$, tal que, $u_t, u_{x_i x_j} \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N \times (0, T))$. Supongamos que
(1) $u_t - \Delta u = 0$ *en* $\mathbf{R}^N \times [0, T)$
(2) $u(x, t) \geq 0$ *en* $\mathbf{R}^N \times [0, T)$.
Entonces se verifica

$$\int_{\mathbf{R}^N} K_t(x - y) u(y, 0) dy = u(x, t). \tag{6.4.17}$$

Demostración.
En el lema (6.4.3) se estableció la desigualdad

$$\int_{\mathbf{R}^N} K_t(x - y) u(y, 0) dy \leq u(x, t).$$

Por otra parte ambos miembros de la desigualdad son solución de la ecuación del calor, por tanto,

$$w(x, t) = u(x, t) - \int_{\mathbf{R}^N} K_t(x - y) u(y, 0) dy \geq 0,$$

verifica las hipótesis del teorema 6.4.5. Consecuentemente $w(x, t) \equiv 0$ que es lo que queríamos demostrar. $\square$

EJERCICIOS DEL CAPITULO 6

1. Sea la función $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = 1 - \cos(2\pi x).$$

Se considera el problema

$$(P) \qquad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, \quad x \in (0, 1) \\ u(0, t) = 0 = u(1, t), & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, 1). \end{cases}$$

a) Demuéstrese que (P) tiene una solución regular y que es única.
b) Determínese $\lim_{t\to\infty} u(x, t)$
c) Determínese el máximo de $u(x, t)$ en $[0, 1] \times [0, \infty)$.

2. Sea la función $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\pi x)}{(k + 1)^4}.$$

Pruébese que $f \in \mathcal{C}^2((0, 1))$.
Se considera el problema

$$(P) \qquad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, \quad x \in (0, 1) \\ u_x(0, t) = 0 = u_x(1, t), & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, 1). \end{cases}$$

a) Demuéstrese que (P) tiene una solución regular.
b) Considerando la energía $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(x, t)dx$, conclúyase si la solución determinada en a) es única.
c) Determínese $\lim_{t\to\infty} u(x, t)$

3. Sea f función continua y acotada en $\mathbf{R}^N$. Para cada $k \in \mathbf{N}$, sea $B_k \subset \mathbf{R}^N$ la bola de centro el origen y radio k. Sea u_k la solución del problema

$$(P_k) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in B_k, \quad T > t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in B_k, \end{cases}$$

$u_k \in \mathcal{C}(\bar{B}_k \times [0,T])$. Supongamos que existe $M > 0$, independiente de k, tal que $|u_k(x,t)| \le M$ en el cilindro $\bar{B}_k \times [0,T]$. Demostrar que sobre cada cilindro $D \times [0,T]$, donde $D \subset \mathbf{R}^N$ es un dominio acotado,

$$\lim_{k\to\infty} u_k(x,t) = u(x,t),$$

donde la convergencia es uniforme y u es la única solución acotada del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \mathbf{R}^N, \quad T > t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

4. Resolver los problemas siguientes:
a) $u_t - 4u_{xx} = 0$, $u(x,0) = 2$.
b) $u_t - u_{xx} = 0$, $u(x,0) = e^{-x^2}$.
c) $u_t - u_{xx} = 0$, $u(x,0) = \operatorname{sen} x$.

5. Sea el problema

$$(P) \qquad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x > 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

donde se supone que f es continua y acotada en $0 < x < \infty$ y $f(0) = 0$. Demostrar que (P) tiene una única solución acotada. Obténgase la fórmula de representación de la solución.

Indicación.- Hágase una extensión impar de f a todo $\mathbf{R}$ y aplíquese lo estudiado.

6. Probar análogo resultado al del problema 5), cuando se sustituye la hipótesis de acotación por la hipótesis de crecimiento $|u(x,t)| \le Me^{ax^2}$.

7. Demostrar que el problema

$$(P) \qquad \begin{cases} u_t - u_{xx} = F(x,t), & x > 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

donde se supone que F tiene derivadas primeras continuas y $|F(x,t)| \le M$, tiene una única solución acotada. Escríbase una fórmula explícita para u.

8. Resolver los problemas:

$$(a) \qquad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = x^2, \quad x > 0, \\ -u_x(0,t) = 0, \quad t > 0, \end{cases}$$

$$(b) \qquad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0, \quad x > 0, \\ -u_x(0,t) = q > 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

9. Sea el problema

$$(P) \qquad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \quad l > x > 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad l > x > 0, \\ u(0,t) = 0 = u(l,t), \quad t > 0, \end{cases}$$

Se llama función de Green de (P) a una función $G(x,\xi,t)$ que verifica:
i) G es regular si $t > 0$ y $x \neq \xi$ y verifica $G_t = G_{xx}$ si $x \neq \xi$.
ii) $G(0,\xi,t) = G(l,\xi,t) = 0$, es decir, verifica los datos de contorno.
iii) $\lim\limits_{x \neq \xi t \to 0^+} G(x,\xi,t) = 0$.
iv) $\lim\limits_{t \to 0^+} \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} G(x,\xi,t)dx = 1$.

(En este sentido se trata de la solución de un problema con dato singular, concretamente una δ de Dirac, como se vió en el capítulo 3.)

Constrúyase la función de Green para (P), usando la solución fundamental.

10. Resolver el problema

$$(P) \qquad \begin{cases} u_t - u_{xx} = F(x,t), \quad l > x > 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad l > x > 0, \\ u(0,t) = \phi(t), \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0, \end{cases}$$

mediante la función de Green hallada en el Problema 9).

11. Resolver los problemas
a) $u_t = 4u_{xx} + te^t$, $u(x,0) = 2$.
b) $u_t = u_{xx} + t \operatorname{sen} x$, $u(x,0) = \operatorname{sen} x$.
a) $4u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = e^{2x-x^2}$.

12. Resolver los siguientes problemas de Cauchy en el plano

$$(a) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u = e^t, & (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad t > 0 \\ u(x,y,0) = \cos x \, \operatorname{sen} y, & (x,y) \in \mathbf{R}^2, \end{cases}$$

$$(b) \qquad \begin{cases} 2u_t - \Delta u = 0, & (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad t > 0 \\ u(x,y,0) = \cos(xy), & (x,y) \in \mathbf{R}^2. \end{cases}$$

13. Resolver los siguientes problemas de Cauchy en $\mathbf{R}^3$

$$(P) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & (x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \quad t > 0 \\ u(x,y,z,0) = u_0(x,y,z), & (x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \end{cases}$$

para,
a) $u_0(x,y,z) = \cos(x+y+z)$.
b) $u_0(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.
c) $u_0(x,y,z) = (x+y+z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.
d) $u_0(x,y,z) = \operatorname{sen}(x+y+z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

14. Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un dominio acotado y consideremos u solución del problema,

$$(P) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u + u^2 = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ u(x,0) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Supongamos que $u_0(x) < 0$ en Ω, ¿se puede concluir que $u(x,t) \le 0$?

Demostrar que si $u(x,t)$ es una solución de (P), se verifica

$$u(x,t) \le \sup_{x \in \Omega}(\max\{0, u_0(x)\}).$$

15. Dada la ecuación $u_t - a^2 u_{xx} - b u_x - cu = F(x,t)$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, demostrar que se reduce a la ecuación del calor con el cambio de variables

$$x = y - bt, \quad t = t, \quad v(y,t) = e^{-ct} u(y - bt, t).$$

Aplicar el resultado anterior para calcular la solución acotada de los problemas que siguen.

$$(P) \qquad \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} - b u_x - cu = F(x,t), & x \in \mathbf{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

siendo,
a) $u_0(x) = 1$, $F(x,t) = 1$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$.
b) $u_0(x) = \cos x$, $F(x,t) = e^t$, $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$.
c) $u_0(x) = \cos x$, $F(x,t) = e^t$, $a = 2$, $b = 0$, $c = 2$.
d) $u_0(x) = 1$, $F(x,t) = t \operatorname{sen} x$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$.
e) $u_0(x) = e^{-x^2}$, $F(x,t) = 0$, $a = 1$, b y c arbitrarios.

Escribir la fórmula de la solución acotada, para F derivable, u_0 continua y acotada.

16. Sea el problema de Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

Supongamos $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N)$ tal que para algún $\delta > 0$ verifica

$$(C) \qquad |u_0(x)| \leq M_\delta e^{\delta |x|^2},$$

demostrar que entonces,

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbf{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy,$$

es solución del problema (P) en la banda $\mathbf{R}^N \times (0, \frac{1}{4\delta})$. Determinar una clase de funciones donde u sea la solución única.

Demostrar que si se supone que se verifica la condición (C) para todo $\delta > 0$, entonces $u(x,t)$ está bien definida y es solución de (P) en $\mathbf{R}^N \times (0, \infty)$.

17. Sea

$$D = \{(x,t) | \quad -\pi/4 < x < \pi/4, \quad t < \frac{1}{3} \log(\frac{1}{2} \frac{\cos 2x}{\cos x})\}.$$

Compruébese que la función

$$u(x,t) = e^{-t} \cos x - \frac{1}{2} e^{-4t} \cos 2x,$$

verifica $u_t - u_{xx} = 0$ en D y se anula en la parte de frontera de D dada por la curva

$$t = \frac{1}{3} \log(\frac{1}{2} \frac{\cos 2x}{\cos x}).$$

¿Qué se puede decir del Principio del Máximo en un caso como este?

Este ejemplo de no unicidad es debido a Bieberbach.

18. Sea el problema

$$(P) \qquad \begin{cases} u_t - u_{xx} = F(x,t), \quad x \in [0,l], \quad t > 0,\ F \in \mathcal{C}([0,l] \times [0,\infty)) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,l],\ u_0 \in \mathcal{C}([0,l]) \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(l,t) \end{cases}$$

Estudiar:

a) Si el problema tiene solución única.

Indicación: Si u *y* v *son soluciones, sea* $w = u - v$*. Derívese* $E(t) = \int_0^l |w(x,t)|^2 dx$ y utilícese la ecuación.

b) Si $F \equiv 0$, $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.