

CAPITULO 3
PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE
SERIES E INTEGRALES
DE FOURIER.
METODO DE SEPARACION
DE VARIABLES.

Introducción

El método de separación de variables que se describe a continuación y se estudiará en detalle a lo largo de todo el capítulo, está en los orígenes de la *teoría de ecuaciones en derivadas parciales*. Fue esbozado en la última mitad del siglo XVIII, especialmente por J. Bernoulli y L. Euler, para estudiar el problema de la cuerda vibrante.

La publicación en 1822 de la "*Theorie Analytique de la Chaleur*" por J.B. Fourier supuso un paso decisivo en la consolidación del método de desarrollo de una función en *serie trigonométrica*. La expresión que Fourier obtiene para los coeficientes del desarrollo en serie trigonométrica de una función como la integral de la función por la correspondiente función trigonométrica, lo que hoy llamamos *coeficientes de Fourier* de la función, aceleró, seguramente, los estudios sobre el concepto de integral. En este sentido los trabajos de Cauchy y posteriormente de Riemann culminaron en la

integral de Lebesgue y la moderna teoría de la integración. Es obvio también el influjo que el problema de desarrollar una función en *serie de Fourier* tuvo sobre la teoría de convergencia de series, para dilucidar en qué sentido la serie de Fourier representa a la función. El propio concepto de función, como hoy se entiende, fue originado en ardorosas polémicas entre los matemáticos de la época. El debate fue motivado por el significado de desarrollar en serie trigonométrica los datos y la solución de los anteriores problemas de ecuaciones en derivadas parciales, conducción de calor y vibraciones de una cuerda.

Muchas áreas de las Matemáticas nacieron a propósito del tratamiento de problemas surgidos en la teoría de series trigonométricas, o bien, de la integral de Fourier. Como ejemplo pueden citarse la *Teoría de Conjuntos* y la *Topología*.

Las series e integrales de Fourier surgieron para resolver los problemas de la difusión del calor y de las vibraciones de una cuerda. Su desarrollo posterior ha seguido caminos diversos y ha servido como uno de los motores importantes de la creación matemática. Los métodos más refinados del *Análisis de Fourier* han contribuido durante las décadas precedentes al importante progreso de las *Ecuaciones en Derivadas Parciales* en el siglo XX, fundamentalmente la teoría lineal.

Como motivación de lo que se va a estudiar en el presente capítulo, tomaremos el mismo problema que consideró Fourier sobre la conducción del calor en una varilla *unidimensional*.

Sea una varilla unidimensional de longitud l . La supondremos ubicada en el intervalo $[0, l]$ del eje OX .

Llamaremos $u(x, t)$ a la temperatura en el punto x y en el instante t , y supondremos una escala normalizada de forma que todas las constantes físicas son la unidad.

Consideraremos el problema con las hipótesis siguientes:

- i) Los extremos de la varilla se mantienen a cero grados en todo tiempo, es decir, $u(0, t) = 0 = u(l, t)$.
- ii) La temperatura inicial, en $t = 0$, es conocida. Es decir, $u(x, 0) = f(x)$.

Las anteriores hipótesis junto a lo visto en la sección (1.3), dan lugar al siguiente problema

$$(P) \quad \begin{cases} (1) & u_t = u_{xx} \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \\ (2) & u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0, \\ (3) & u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

La idea es buscar soluciones de (1) de la forma

$$u(x, t) = \phi(x)\psi(t),$$

para lo cual se ha de verificar la ecuación

$$\psi'(t)\phi(x) = \psi(t)\phi''(x),$$

o bien

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = \lambda,$$

donde entonces necesariamente λ ha de ser una constante. Por tanto, tomando λ fijo y las soluciones de

$$\begin{cases} \psi'(t) = \lambda\psi(t) \\ \phi''(x) = \lambda\phi(x), \end{cases}$$

tenemos soluciones de (1) de *variables separadas*. Es decir, se tiene explícitamente

$$u_\lambda(x, t) = e^{\lambda t}(c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}), \quad \text{si } \lambda \neq 0$$

y

$$u_0(x, t) = c_1 x + c_2, \quad \text{si } \lambda = 0,$$

soluciones de (1).

De la familia de soluciones de (1), $u_\lambda(x, t)$, se buscan las que verifican las condición (2); es decir, tras sustituir en (2), las constantes c_1 y c_2 deben satisfacer el sistema lineal

$$(3.0.2) \quad \begin{cases} e^{\lambda t}(c_1 + c_2) = 0 \\ e^{\lambda t}(c_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}l}) = 0 \end{cases}$$

si $\lambda \neq 0$. Para $\lambda = 0$ sólo se encuentra la solución $c_1 = c_2 = 0$, que se corresponde con la solución trivial de (1). La condición necesaria y suficiente para que (3.0.2) tenga solución no trivial es que

$$(3.0.3) \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}l} & e^{-\sqrt{\lambda}l} \end{pmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda}l} - e^{\sqrt{\lambda}l} = 0$$

Evidentemente, si $\lambda > 0$ no se verifica (3.0.3). Sea $\lambda < 0$ y llamamos $-\mu^2 = \lambda$ para $\mu \in \mathbf{R}$; (3.0.3) es equivalente a

$$\text{sen}(\mu l) = 0,$$

es decir, necesariamente,

$$\mu l = k\pi, \quad k \in \mathbf{N},$$

que implica

$$-\lambda = \frac{k^2 \pi^2}{l^2}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Como resumen de los cálculos realizados se tiene que las soluciones de variables separadas de (1) verificando las condiciones de contorno (2) son los múltiplos constantes de

$$u_k(x, t) = \text{sen}\left(\frac{k\pi}{l}x\right)e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}, \quad \text{para } k \in \mathbf{N}.$$

Si se supone que f es un polinomio trigonométrico de senos, es decir,

$$f(x) = \sum_{k=1}^N c_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{l}x\right),$$

por el principio de superposición o, lo que es lo mismo, por la linealidad de la ecuación y de las condiciones del problema (P), la solución de (1), (2) y (3) resulta ser

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k u_k(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{l}x\right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}.$$

En general el dato $f(x)$ no es un polinomio trigonométrico de senos. La afirmación que hizo Fourier "grosso modo" es la siguiente:

"Cualquier función $f(x)$ se puede expresar como una serie de senos"

La anterior afirmación se escribe como que toda función f se puede expresar por la fórmula

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

para determinadas constantes c_k .

El propio Fourier sugirió la forma de los coeficientes, precisamente por la expresión

$$(3.0.4) \quad c_k = \frac{1}{a} \int_0^l f(s) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{l}s\right) ds,$$

siendo

$$a \equiv \int_0^l \left| \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{l}s\right) \right|^2 ds = \frac{l}{2}.$$

Si es cierta la conjetura de Fourier el candidato a solución del problema (P) es

$$(3.0.5) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{l}x\right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}.$$

De todas formas, en las afirmaciones anteriores poco o nada está claro. ¿Qué quiere decir el signo "=" en la series anteriores? ¿Dependerá del tipo de función que se considere? ¿Qué razón hay para definir los coeficientes c_k por (3.0.4)? ¿Estará bien definida la función u de (3.0.5)? ¿Será la solución de (P)?

Este capítulo está dedicado a contestar las anteriores preguntas, al menos parcialmente, y a aplicar los resultados a otros problemas de Ecuaciones en Derivadas Parciales.

Las secciones (3.1) y (3.2) se dedican a estudiar los problemas de contorno para ecuaciones ordinarias de segundo orden, con especial énfasis sobre el *problema de autovalores de Sturm-Liouville*. En una primera lectura pueden obviarse algunas de las demostraciones de la sección (3.2), sobre todo la de existencia de autovalores.

En la sección (3.3) se estudia el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el disco unidad de \mathbf{R}^2 y la teoría de convergencia de series de Fourier. Este estudio permitirá estudiar problemas mixtos unidimensionales para la ecuación del calor y de ondas en las secciones (3.4) y (3.5), respectivamente. La sección (3.6) presenta la motivación de la transformación de Fourier y algunas de sus propiedades elementales. Esta última sección también es prescindible en una primera lectura.

Una colección de ejercicios y problemas pone fin a este capítulo.

3.1.- Problemas de contorno de segundo orden. Teorema de la alternativa. Función de Green.

Se considerará el siguiente problema

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \\ m_1y(a) + n_1y'(a) + p_1y(b) + q_1y'(b) = h_1 \\ m_2y(a) + n_2y'(a) + p_2y(b) + q_2y'(b) = h_2, \end{cases}$$

donde $m_i, n_i, p_i, q_i, h_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2$ y se supone que $a_0 \in \mathcal{C}^1([a, b])$, $a_1, a_2 \in \mathcal{C}([a, b])$ y $a_0(x) \neq 0$ si $x \in [a, b]$. Salvo mención en contrario supondremos $f \in \mathcal{C}([a, b])$.

Las condiciones de contorno se pueden escribir matricialmente como sigue

$$\begin{pmatrix} m_1 & n_1 & p_1 & q_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ y(b) \\ y'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Merecerán especial atención los casos particulares siguientes:

$$(3.1.2) \quad \begin{pmatrix} m_1 & n_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & q_2 \end{pmatrix},$$

que son condiciones separadas o de Sturm y

$$(3.1.3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que con $h_1 = 0 = h_2$ son condiciones periódicas. Como se verá, estos dos casos particulares tienen propiedades interesantes y además aparecerán con frecuencia al resolver los problemas de ecuaciones en derivadas parciales por el método de Fourier.

Cuando $h_1 = h_2 = 0$ se dirá que se trata del problema de contorno con condiciones *homogéneas*.

La primera cuestión que se plantea es la existencia y unicidad de solución del problema de contorno (3.1.1); téngase en cuenta que se trata de un problema *global*, es decir, la solución ha de estar definida en todo el intervalo $[a, b]$ y las condiciones se dan en los *dos* extremos.

Sin embargo, en este caso la respuesta es una cuestión de Álgebra Lineal elemental y representa un modelo muy interesante de argumento: la reducción de la demostración de existencia a la prueba de unicidad para un problema asociado.

Este es el método que se usa en las aplicaciones del teorema de Rouché-Frobenius a la discusión de sistemas lineales y tiene extensiones a la teoría de ecuaciones integrales y contextos más generales. Nos referiremos a este tipo de resultados como *teoremas de alternativa*.

Por brevedad vamos a usar la siguiente notación

$$(3.1.4) \quad \tilde{L}(y(x)) \equiv a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y,$$

$$U(y) \equiv \begin{pmatrix} m_1 & n_1 & p_1 & q_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ y(b) \\ y'(b) \end{pmatrix}.$$

Con esta notación podemos formular el resultado

3.1.1. Teorema. *(de alternativa)*

Sea el problema

$$(P_1) \quad \begin{cases} \tilde{L}(y(x)) = f(x), \\ U(y) = h \in \mathbf{R}^2, \end{cases}$$

y el problema homogéneo asociado

$$(P_2) \quad \begin{cases} \tilde{L}(y(x)) = 0, \\ U(y) = 0 \in \mathbf{R}^2. \end{cases}$$

Entonces se verifica una de las dos alternativas siguientes:

- (1) (P_1) tiene solución única.
- (2) (P_2) tiene solución no trivial.

Demostración.

Toda solución de la ecuación $\tilde{L}(y(x)) = f(x)$ se escribe como

$$y(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + u(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R},$$

donde $\{\phi_1, \phi_2\}$ es una base del espacio vectorial

$$\mathcal{L} = \{y \in \mathcal{C}^2 \mid \tilde{L}(y) = 0\}$$

y $\tilde{L}(u) = f(x)$.

Por ser lineales las condiciones de contorno se tiene

$$U(y) = c_1U(\phi_1) + c_2U(\phi_2) + U(u).$$

Entonces para que (P_1) tenga solución única cualquiera que sea $h \in \mathbf{R}^2$ ha de ser

$$\text{rango}(U(\phi_1), U(\phi_2)) = 2.$$

Si

$$\text{rango}(U(\phi_1), U(\phi_2)) < 2,$$

(P_2) tiene solución distinta de la trivial. \square

Nótese que como aplicación del teorema de Rouché-Frobenius, si

$$\text{rango}(U(\phi_1), U(\phi_2)) < 2,$$

el problema (P_1) tiene solución, y en este caso no es única, si se verifica

$$\text{rango}(U(\phi_1), U(\phi_2)) = \text{rango}(U(\phi_1), U(\phi_2), h - U(u)).$$

Como aplicación del teorema de alternativa si suponemos que el problema homogéneo asociado (P_2) tiene sólo solución trivial, el problema

$$(3.1.5) \quad \begin{cases} \tilde{L}(y) = f \\ U(y) = h \end{cases}$$

tiene solución única, que por linealidad podemos expresarla como suma de las soluciones de los problemas

$$(3.1.6) \quad \begin{cases} \tilde{L}(y_1) = 0 \\ U(y_1) = h, \end{cases}$$

$$(3.1.7) \quad \begin{cases} \tilde{L}(y_2) = f \\ U(y_2) = 0, \end{cases}$$

es decir, la solución $y(x)$ de (3.1.5) puede expresarse por $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$. La solución de (3.1.6), una vez conocida la solución general de la ecuación diferencial, es un ejercicio elemental de algebra lineal. Vamos a ocuparnos de dar una fórmula explícita para la solución de (3.1.7) que tiene interés es sí misma y en las secciones siguientes.

La idea es resolver un problema particular, para un segundo miembro *singular* en el sentido que se precisará más adelante, y a partir de la solución de tal problema se generará la solución de (3.1.7).

La solución del problema con dato *singular* tiene nombre propio, se llama *función de Green* del problema (3.1.7).

3.1.2. Teorema.

Supongamos que el problema

$$\begin{cases} \tilde{L}(y) = 0 \\ U(y) = 0, \end{cases}$$

tiene sólo solución trivial.

Entonces existe una única función

$$G : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$$

verificando:

- (1) $G \in \mathcal{C}([a, b] \times [a, b])$, $\frac{\partial G}{\partial x} \in \mathcal{C}([a, b] \times [a, b] - \{(x, x) \mid x \in [a, b]\})$
- (2) $\frac{\partial G}{\partial x}(t^+, t) - \frac{\partial G}{\partial x}(t^-, t) = \frac{1}{a_0(t)}$, (Condición de salto).
- (3) Para cada $t \in [a, b]$ fijo se verifica $\tilde{L}G(x, t) = 0$ en $\{a \leq x < t\} \cup \{t < x \leq b\}$.
- (4) $U(G(x, t)) = 0$ para cada $t \in [a, b]$ fijo.

(Se nota

$$(3.1.8) \quad \frac{\partial G}{\partial x}(t^+, t) = \lim_{x > t, x \rightarrow t} \frac{\partial G}{\partial x}(x, t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial G}{\partial x}(t^-, t) = \lim_{x < t, x \rightarrow t} \frac{\partial G}{\partial x}(x, t).$$

Demostración.

Sean $\{\phi_1(x), \phi_2(x)\}$ soluciones linealmente independientes de la ecuación $\tilde{L}(u) = 0$, es decir, una base del espacio vectorial $\mathcal{L} = \{y \in \mathcal{C}^2([a, b]) \mid \tilde{L}(y) = 0\}$. Supondremos la base normalizada de tal forma que en algún $x_0 \in [a, b]$, la matriz wronskiana es la identidad, es decir,

$$(3.1.9) \quad \Phi(\phi_1, \phi_2)(x_0) = \begin{pmatrix} \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) \\ \phi_1'(x_0) & \phi_2'(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así el wronskiano es $W(\phi_1, \phi_2) = \det \Phi(\phi_1, \phi_2)$. Fijado $t \in [a, b]$ consideramos la familia de funciones

$$(3.1.10) \quad K(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq x < t \\ c_1(t)\phi_1(x) + c_2(t)\phi_2(x) & \text{si } t \leq x \leq b, \end{cases}$$

donde $c_1(t), c_2(t) \in \mathbf{R}$ serán elegidos de forma que

$$(3.1.11) \quad \begin{cases} (1) & K(t, t) = 0 \\ (2) & \frac{\partial K}{\partial x}(t^+, t) - \frac{\partial K}{\partial x}(t^-, t) = \frac{1}{a_0(t)}. \end{cases}$$

El sistema (3.1.11) se traduce en

$$(3.1.12) \quad \begin{pmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{a_0(t)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que tiene solución única por (3.1.9) y la fórmula de Jacobi-Liouville para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. (Véase *M. Guzmán, "Ecuaciones Diferenciales Ordinarias", Editorial Alhambra 1975, página 162*).

Resolviendo (3.1.12) obtenemos

$$(3.1.13) \quad \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_2'(t) & -\phi_2(t) \\ -\phi_1'(t) & \phi_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{a_0(t)} \frac{1}{W(\phi_1, \phi_2)(t)},$$

donde $W(\phi_1, \phi_2)(t)$ es definido en (3.1.9). Por tanto,

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(\phi_1, \phi_2)(t)} \frac{1}{a_0(t)} \begin{pmatrix} -\phi_2(t) \\ \phi_1(t) \end{pmatrix}.$$

De esta forma (3.1.10) se convierte en

$$(3.1.14) \quad K(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq x \leq t \\ \frac{\phi_1(t)\phi_2(x) - \phi_1(x)\phi_2(t)}{a_0(t)W(\phi_1, \phi_2)(t)} & \text{si } t \leq x \leq b, \end{cases}$$

La función K obtenida en (3.1.14) verifica las condiciones 1), 2) y 3) del teorema.

Definiremos la función

$$(3.1.15) \quad G(x, t) = K(x, t) + d_1\phi_1(x) + d_2\phi_2(x),$$

es decir, como la suma de la función K definida en (3.1.14) y una solución de la ecuación diferencial homogénea, $y(x) = d_1\phi_1(x) + d_2\phi_2(x)$, que será elegida de forma que G verifique el requerimiento 4) del teorema. Es obvio, por otra parte, que cualquier función de la forma (3.1.15) continúa verificando los requerimientos 1), 2) y 3) del teorema.

Queda por probar que para t fijo se pueden elegir $d_1, d_2 \in \mathbf{R}$ de forma que G verifique la condición 4). Es decir, hemos de resolver el sistema

$$(3.1.16) \quad d_1U(\phi_1) + d_2U(\phi_2) = -U(K),$$

que tiene solución única por el teorema de alternativa. Para tal elección de d_1 y d_2 tenemos la función G satisfaciendo las condiciones del teorema.

A la función G se le llama *función de Green* para el problema de contorno. \square

Ejemplo 1.

Consideremos el problema

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + y = 0 \\ y(1) = y(e) = 0. \end{cases}$$

Si se hace el cambio de variable dependiente $x = e^t$ se transforma en una ecuación con coeficientes constantes que se integra elementalmente. Tras deshacer el cambio obtenemos que la solución general de la ecuación de nuestro problema es

$$y(x) = c_1 \cos(\log x) + c_2 \operatorname{sen}(\log x).$$

Es muy fácil ver que el problema homogéneo tiene sólo la solución trivial. Procedemos a calcular la función de Green. Como se trata de condiciones separadas se pueden organizar los cálculos en la forma siguiente.

1) Si se considera

$$K(x, t) = \begin{cases} a(t) \operatorname{sen}(\log x) & \text{si } 1 \leq x < t \\ b(t)(\operatorname{sen}(\log x) - \tan(1) \cos(\log x)) & \text{si } t < x \leq e \end{cases}$$

se verifican los datos de contorno y que es solución en todo el intervalo $[1, e]$ salvo en $x = t$.

2) Para que K resulte continua basta tomar

$$a(t) = c(t)(\operatorname{sen}(\log t) - \tan 1 \cos(\log t))$$

y

$$b(t) = c(t) \operatorname{sen}(\log t),$$

donde $c(t)$ es arbitraria.

3) Si elegimos ahora $c(t)$ para que se verifique la condición de salto, resulta que la función de Green es

$$G(x, t) = \frac{1}{t \tan 1} \begin{cases} (\operatorname{sen}(\log t) - \tan(1) \cos(\log t)) \operatorname{sen}(\log x) & \text{si } 1 \leq x < t \\ \operatorname{sen}(\log t)(\operatorname{sen}(\log x) - \tan(1) \cos(\log x)) & \text{si } t < x \leq e \end{cases}$$

Con la función de Green calculada en el teorema anterior se obtiene la forma explícita de la solución del problema (3.1.7), esta expresión es el contenido del siguiente resultado.

3.1.3. Teorema.

Supongamos que el problema homogéneo asociado,

$$\begin{cases} \tilde{L}(y) = 0 \\ U(y) = 0, \end{cases}$$

tiene sólo solución trivial y sea $G(x, t)$ su función de Green.

Supongamos que $f \in \mathcal{C}([a, b])$, entonces la única solución de (3.1.7) es

$$(3.1.17) \quad y(x) = \int_a^b G(x, t)f(t)dt.$$

Demostración.

La unicidad es consecuencia del *teorema de alternativa*, (3.1.1). Comprobaremos que y verifica la ecuación diferencial, pues las condiciones de contorno es obvio que son satisfechas por verificarlas la función de Green. Se tiene

$$y(x) = \int_a^b G(x, t)f(t)dt = \int_a^x K(x, t)f(t)dt + \int_a^b (d_1\phi_1(x) + d_2\phi_2(x))f(t)dt$$

y por tanto,

$$(3.1.18) \quad \tilde{L}(y)(x) = \tilde{L}\left(\int_a^x K(x, t)f(t)dt\right),$$

dado que el resto es solución de la ecuación homogénea.

Calculando directamente se obtiene

$$y'(x) = \int_a^x \frac{\partial K}{\partial x}(x, t)f(t)dt$$

por ser $K(x, x) = 0$, y entonces

$$y''(x) = \int_a^x \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, t)f(t)dt + \frac{f(x)}{a_0(x)}$$

por ser el salto de $\frac{\partial K}{\partial x}$ en $x = t$, igual a $\frac{1}{a_0(t)}$.

Entonces

$$\tilde{L}\left(\int_a^x K(x, t)f(t)dt\right) = \int_a^x \tilde{L}(K(x, t))f(t)dt + a_0(x)\frac{f(x)}{a_0(x)} = f(x),$$

pues

$$\tilde{L}(K(x, t)) = 0 \quad \text{si } a \leq t < x.$$

Así (3.1.18) y esta última observación prueban el teorema. \square

A continuación estudiamos con más detalle qué significado tiene la función de Green, lo cual nos permitirá entender mejor el resultado del teorema (3.1.3).

Suponemos que se verifican las hipótesis de los teoremas anteriores.

Fijo $t \in (a, b)$, consideramos $\varepsilon > 0$ tal que, $[t - \varepsilon, t + \varepsilon] \subset [a, b]$, y la función

$$(3.1.19) \quad f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \chi_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \\ \frac{1}{2\varepsilon} & \text{si } x \in [t - \varepsilon, t + \varepsilon]. \end{cases}$$

Según una sencilla extensión del teorema (3.1.3), la solución $y_\varepsilon(x)$ del problema

$$\begin{cases} \tilde{L}(y_\varepsilon(x)) = f_\varepsilon(x) \\ U(y) = 0, \end{cases}$$

es dada por la fórmula

$$y_\varepsilon(x) = \int_a^b G(x, s) f_\varepsilon(s) ds = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} G(x, s) ds$$

Por la continuidad de $G(x, t)$, se concluye que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(x) = G(x, t).$$

Observamos, por otra parte que

$$(3.1.20) \quad \int_a^b f_\varepsilon(x) dx = 1,$$

de acuerdo con la definición de f_ε . Por tanto,

- (1) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = 0$ si $x \neq t$, siendo el límite infinito en $x = t$.
- (2) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b f_\varepsilon(x) dx = 1$
- (3) Si $g \in \mathcal{C}([a, b])$ entonces $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b g(x) f_\varepsilon(x) dx = g(t)$.

Formalmente tenemos que, llamando δ_t al límite puntual de la familia $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$, se debería verificar

- (1) $\int_a^b g(x) \delta_t dx = g(t)$.
- (2) El soporte de δ_t es sólo el punto $t \in (a, b)$.

Si se aplica (1) a la función $g(x) \equiv 1$ se debería tener que $\int_a^b \delta_t dx = 1$, lo cual en el marco de las funciones integrables choca de plano con la condición (2) y la teoría de la integral: *Una función con soporte en un único punto tiene integral cero*

Sin embargo los cálculos formales con objetos como δ_t son frecuentes y muy útiles en Física. Fueron desarrollados por el premio Nobel británico Paul Dirac por lo que a δ_t se le llama *delta de Dirac concentrada en el punto t*. Intuitivamente puede mirarse como una masa unidad concentrada en un punto.

Desde el punto de vista matemático, justificar el argumento formal de representar el límite puntual de $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ por un objeto δ_t , que a la vista de lo discutido no puede ser una función, requiere el desarrollo de la Teoría de Distribuciones, elaborada en la década de los cincuenta por el matemático francés L. Schwartz y los rusos Gelfand y Shilov, y que escapa del alcance de este texto.

Pero al menos formalmente por el momento podemos decir que la función de Green es la *solución*, en algún sentido débil, del problema

$$(3.1.21) \quad \begin{cases} \tilde{L}(G(x, t)) = \delta_t(x) \\ U(G) = 0. \end{cases}$$

De esta forma si se interpreta el segundo miembro de (3.1.7) como una densidad, $f(t)$ en cada punto $t \in (a, b)$, la fórmula (3.1.17) puede leerse como la "suma" de las soluciones de (3.1.21) multiplicadas por la densidad en cada punto. Realmente es una extensión del principio de superposición a integrales.

Como resumen, el cálculo de la solución de un problema *singular*, es la clave para obtener la solución de (3.1.7).

Otro punto de vista interesante que sugieren los resultados anteriores es el siguiente.

Consideremos

$$\mathcal{E} = \{\phi \in \mathcal{C}^2([a, b]) \mid U(\phi) = 0\},$$

es decir, las funciones con dos derivadas continuas que satisfacen las condiciones de contorno. Entonces el *operador diferencial* \tilde{L} puede verse como la aplicación

$$\tilde{L} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}([a, b])$$

que es lineal y uno a uno, pues se supone que el problema homogéneo asociado tiene sólo la solución trivial. Pero por el teorema (3.1.3), definiendo

$$\mathcal{G} : \mathcal{C}([a, b]) \longrightarrow \mathcal{E},$$

por

$$(3.1.22) \quad \mathcal{G}f(x) = \int_a^b G(x, t)f(t)dt,$$

se tiene

$$(3.1.23) \quad \tilde{L}\mathcal{G}f(x) = f(x),$$

luego \mathcal{G} es la aplicación inversa de \tilde{L} . Además la unicidad de solución implica también que

$$(3.1.24) \quad \mathcal{G}\tilde{L}u(x) = u(x).$$

Esta *algebraización* del problema será útil. Para que así sea, dotamos al espacio de funciones continuas de una norma parecida a la euclídea en \mathbf{R}^N , en el sentido de que es inducida por un producto escalar.

Más precisamente, si $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ definimos el producto escalar

$$(3.1.25) \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\bar{g}(t)dt,$$

entonces la norma asociada es

$$(3.1.26) \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = (\langle f, f \rangle)^{\frac{1}{2}}.$$

La única propiedad que requiere alguna demostración no obvia es la *propiedad triangular* de la norma, la cual está basada en la desigualdad de Cauchy-Schwartz, que se obtiene a continuación.

3.1.4. Lema. (*Desigualdad de Cauchy-Schwartz*)

Se verifica

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

Demostración.

Sean $x, \theta \in \mathbf{R}$. Entonces,

$$0 \leq \|f - xe^{i\theta}g\|_2^2 = \langle f - xe^{i\theta}g, f - xe^{i\theta}g \rangle = \|f\|_2^2 - 2\Re[xe^{-i\theta}\langle f, g \rangle] + x^2\|g\|_2^2.$$

Tomando $\theta = \arg\langle f, g \rangle$ se tiene

$$0 \leq \|f - xe^{i\theta}g\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2x|\langle f, g \rangle| + x^2\|g\|_2^2,$$

en consecuencia el polinomio de segundo grado debe ser positivo o cero, es decir

$$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 \|g\|_2^2$$

como se quería demostrar. \square

La desigualdad triangular se obtiene por el siguiente cálculo

$$\begin{aligned}\|f + g\|_2^2 &= \|f\|_2^2 + 2\Re\langle f, g \rangle + \|g\|_2^2 \leq \\ &\leq \|f\|_2^2 + 2|\langle f, g \rangle| + \|g\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 + 2\|f\|_2\|g\|_2 + \|g\|_2^2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2.\end{aligned}$$

Además la desigualdad de Cauchy-Schwartz permite establecer las propiedades de la aplicación \mathcal{G} que se usarán.

(1) Se verifica que existe una constante $C > 0$ tal que

$$(3.1.27) \quad \|\mathcal{G}f\|_2 \leq C\|f\|_2, \quad \text{si } f \in \mathcal{C}([a, b])$$

En efecto, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{G}f\|_2^2 &= \int_a^b \left| \int_a^b G(x, t)f(t)dt \right|^2 dx \leq \\ &\leq \int_a^b \left\{ \left(\int_a^b |G(x, t)|^2 dt \right) \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right) \right\} dx = \\ &\left(\int_a^b \int_a^b |G(x, t)|^2 dt dx \right) \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)\end{aligned}$$

que prueba (3.1.27).

(2) Si f es continua se verifica

$$(3.1.28) \quad |\mathcal{G}f(x)| \leq \int_a^b |G(x, t)||f(t)|dt \leq \sup_{(x,t) \in [a,b] \times [a,b]} |G(x, t)|(b-a)^{\frac{1}{2}}\|f\|_2,$$

donde la última desigualdad resulta de aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

(3) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$, que depende sólo de G y ε , tal que si $|x - y| < \delta$, entonces

$$(3.1.29) \quad |\mathcal{G}f(x) - \mathcal{G}f(y)| \leq \varepsilon\|f\|_2(b-a)^{\frac{1}{2}}.$$

En efecto, la continuidad uniforme de G en $[a, b] \times [a, b]$ implica que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $|G(x, t) - G(y, t)| < \varepsilon$. La desigualdad de Cauchy-Schwartz permite terminar y obtener (3.1.29).

De las propiedades 1), 2) y 3) concluimos

3.1.5. Proposición.

Sea $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{C}([a, b]) \mid \|f\|_2 \leq R\}$. Si se considera el conjunto de funciones $\mathcal{G}(\mathcal{B}) = \{\mathcal{G}(f) \mid f \in \mathcal{B}\}$, se verifican

- (1) $\sup_{x \in [a, b]} |\mathcal{G}f(x)| \leq M(b-a)^{\frac{1}{2}}R$, donde $M = \sup_{(x,t) \in [a,b] \times [a,b]} |G(x, t)|$
- (2) Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces

$$|\mathcal{G}f(x) - \mathcal{G}f(y)| \leq \varepsilon R(b-a)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{para toda } f \in \mathcal{B}.$$

Por su importancia, la propiedad 2) recibe nombre propio, las familias de funciones que la verifican se dicen *equicontinuas*, viniendo la palabra a expresar que el número $\delta > 0$ que se postula existe, no depende más que de ε y es independiente de los puntos y de la función f . Para ser más formales recogemos las ideas anteriores como sigue.

3.1.6. Definición.

Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}([a, b])$ una familia de funciones. Diremos que \mathcal{F} es equicontinua si se verifica que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

Nota. Lo que sigue puede ser omitido en una primera lectura, en la cual, algunos de los teoremas de la sección siguiente donde se utiliza, pueden ser admitidos sin prueba. No obstante para que el texto sea lo más autocontenido posible nos ha parecido oportuno hacer esta pequeña incursión en el Análisis Real.

Haremos una primera observación sobre un ejemplo. Si se considera la sucesión de funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ definida por

$$(3.1.30) \quad f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - n(x - \frac{1}{2}) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \quad n = 3, 4, \dots, \end{cases}$$

se tiene que si $m > n$

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_2^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0$$

como se comprueba fácilmente por integración elemental. En este sentido podemos decir que $\{f_n\}_{n \geq 3}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}([a, b])$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_2$, definida en (3.1.26). De otra parte el límite puntual de la sucesión es muy fácil ver por inspección directa que es la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

que *no es continua*. Por consiguiente el espacio de funciones continuas en $[0, 1]$ con la norma definida en (3.1.26) tiene la dificultad de que no toda sucesión de Cauchy tiene como límite una función continua. Por esta razón se dice que el espacio $\mathcal{C}([0, 1])$ con la norma $\|\cdot\|_2$ *no es completo*. Este problema en el paso al límite es una dificultad seria que hay que evitar. Para ello la idea es *completar* el espacio de funciones continuas añadiendo aquellas funciones que son límites puntuales de sucesiones de Cauchy respecto a la norma $\|\cdot\|_2$. Procedemos a continuación a indicar la solución del anterior problema en el paso al límite.

Se consideran funciones integrables con respecto a la integral de Lebesgue.

Como referencia complementaria de *teoría de la integral* sugerimos el texto de De Barra, "Measure Theory and integration", Ed. Ellis Horwood Ltd.(1981).

Sea el espacio de funciones

$$L^2([a, b]) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{C} \mid f \text{ medible, } \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty\},$$

es fácil ver que L^2 así definido es un espacio vectorial. Además si se define

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\bar{g}(t)dt$$

es un producto escalar en L^2 . La prueba de la desigualdad de Cauchy-Schwartz es aplicable aquí también.

Se considerarán dos *funciones equivalentes* si son iguales salvo en un conjunto de medida cero y se consideraran los elementos de L^2 como las clases de equivalencia respecto a esta relación. Es claro que, con esta precisión, la extensión de la definición (3.1.26) define una norma sobre L^2 . Dejamos al lector que complete los detalles de esta última afirmación.

Podemos establecer ahora el resultado básico.

3.1.7. Proposición.

Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ sucesión de Cauchy en $L^2([a, b])$, entonces existe $f \in L^2([a, b])$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0.$$

(Es decir, $L^2([a, b])$ es completo.)

Demostración.

Dada la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, seleccionamos una subsucesión $\{f_{k_n}\}_{n \in \mathbf{N}}$ tal que

$$(3.1.31) \quad \|f_{k_n} - f_{k_{n+1}}\|_2 \leq \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbf{N},$$

lo cual es posible por tratarse de una sucesión de Cauchy.

Definimos

$$g_m(x) = \sum_{n=1}^m |f_{k_n}(x) - f_{k_{n+1}}(x)|,$$

con lo que se tiene

$$(3.1.32) \quad \begin{cases} (i) & g_m(x) \leq g_{m+1}(x) \quad \text{para cada } x \in [a, b], \\ (ii) & \|g_m(x)\|_2 \leq 1 \quad \text{(en virtud (3.1.31)).} \end{cases}$$

Por (i) en (3.1.32) existe $g(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x)$, salvo en un conjunto de medida cero de $[a, b]$. El teorema de la Convergencia Monótona de Lebesgue demuestra que:

- 1) $g \in L^2([a, b])$,
 2) $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b |g_m(x) - g(x)|^2 dx = 0$.
 Además,

$$|f_{k_m}(x) - f_{k_l}(x)| \leq \sum_{j=l+1}^{m-l} |f_{k_j}(x) - f_{k_{j-1}}(x)| \leq g(x) - g_{l-1}(x),$$

y en consecuencia $\{f_{k_n}(x)\}_{n \in \mathbf{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $x \in [a, b] - E$, E conjunto de medida cero. Por tanto existe una función medible f tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x) = f(x)$ en $x \in [a, b] - E$. Si observamos lo demostrado hasta ahora podemos resumirlo en la siguiente afirmación que tiene interés en sí misma.

Dada una sucesión de Cauchy en L^2 , existe una subsucesión que converge puntualmente salvo en un conjunto de medida cero.

Es obvio que

- a) $|f(x) - f_{k_n}(x)| \leq g(x)$ para cada $n \in \mathbf{N}$, por tanto,

$$\|f\|_2 \leq \|f - f_{k_n}\|_2 + \|f_{k_n}\|_2 \leq \|g\|_2 + \|f_{k_n}\|_2 < \infty,$$

o, dicho de otra manera, $f \in L^2([a, b])$.

- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - f_{k_n}(x)| = 0$ en todo $x \in [a, b] - E$

El teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue con a) y b) prueba que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_{k_n}\|_2 = 0$$

Para terminar, sólo hace falta notar que al ser $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ sucesión de Cauchy, se tiene que toda la sucesión converge a f , es decir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_2 = 0.$$

□

En las sección 3.3 probaremos que las funciones continuas son densas en L^2 , por tanto no incidimos más aquí en ese resultado.

La norma de L^2 se define por el producto escalar y L^2 resulta ser completo respecto a ella. Es lo mismo que ocurre en \mathbf{R}^N con la norma euclídea. Esto sugiere que la *geometría* de L^2 sea muy parecida a la euclídea. Se verá en las próximas secciones que hay una gran similitud de estructuras geométricas, como se presume. Los espacios cuya norma procede de un producto escalar y que respecto a ella son completos son conocidos en la literatura como *espacios de Hilbert*, en honor del eminente matemático germano David Hilbert.

3.2.- Problemas autoadjuntos. Problema de Sturm-Liouville. Autovalores.

Consideremos el *operador diferencial* \tilde{L} definido para cada $y \in \mathcal{C}^2([a, b])$ por

$$\tilde{L}(y)(x) \equiv a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x),$$

que es el considerado en (3.1.4).

Supondremos que $a_0 \in \mathcal{C}^1([a, b])$, que $a_1, a_2 \in \mathcal{C}([a, b])$ y que $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Con estas hipótesis de regularidad, multiplicando la ecuación $\tilde{L}(y) = f$ por una función $g \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tal que $g(x) \neq 0$ en cada $x \in [a, b]$, resulta la ecuación $g\tilde{L}(y) = gf$, la cual tiene por soluciones la misma familia de funciones que la ecuación de partida. Esta observación elemental lleva a buscar una función g tal que la ecuación resultante tenga forma *autoadjunta* en el sentido que precisaremos a continuación.

Buscaremos, en particular, una función g tal que se pueda escribir la identidad siguiente

$$(3.2.1) \quad g(x)(a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x)) \equiv (p(x)y'(x))' + q(x)y(x).$$

La función g ha de verificar

$$p = a_0g, \quad p' = ga_1, \quad q = ga_2,$$

es decir, se debe tener que $(ga_0)' = ga_1$ o, lo que es lo mismo,

$$(3.2.2) \quad g'(x) = \left(\frac{a_1(x) - a_0'(x)}{a_0(x)} \right) g(x).$$

Cualquier solución no nula de (3.2.2) es válida para conseguir la ecuación en la forma (3.2.1). La solución general de (3.2.2) es

$$g(x) = g(a) \frac{a_0(a)}{a_0(x)} \exp\left\{ \int_a^x \frac{a_1(s) - a_0'(s)}{a_0(s)} ds \right\}.$$

La forma para el operador \tilde{L} ,

$$(3.2.3) \quad L(y)(x) \equiv (p(x)y'(x))' + q(x)y(x),$$

se llama *forma autoadjunta*. Por lo visto tenemos que las ecuaciones $\tilde{L}(y) = f$ y $L(y) = fg$ son equivalentes, en el sentido que tienen las mismas soluciones. A partir de ahora consideraremos los problemas de contorno escritos en forma autoadjunta, con

las hipótesis resultantes de los cálculos anteriores, es decir, $p \in \mathcal{C}^1([a, b])$, $q \in \mathcal{C}([a, b])$ y $p(x) \neq 0$, cualquiera que sea $x \in [a, b]$. El problema de contorno

$$(3.2.4) \quad \begin{cases} L(y) \equiv (py')' + qy = f \\ U(y) = h \end{cases}$$

con las condiciones de contorno *separadas*, precisamente las que corresponden a la matriz

$$\begin{pmatrix} m_1 & n_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & q_2 \end{pmatrix},$$

se llama *problema de Sturm-Liouville*.

Paralelamente estudiaremos el problema (3.2.4) con condiciones periódicas, es decir, las dadas por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

en cuyo caso supondremos también

$$p(a) = p(b)$$

Observamos que estas son las condiciones (3.1.2) y (3.1.3), respectivamente. Estos dos problemas son el objeto de estudio de esta sección. Comenzamos por estudiar las propiedades formales comunes al problema de Sturm-Liouville y al problema periódico, que son claves para estudiar el problema de autovalores asociado a (3.2.4)

3.2.1. Lema. (Identidad de Lagrange)

Sea L definido por (3.2.3) y sean $u, v \in \mathcal{C}^2([a, b])$. Entonces se verifica

$$(I - L) \quad uL(v) - vL(u) = (p(uv' - u'v))'$$

Demostración.

Es un simple cálculo con determinantes, a saber,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} u & L(u) \\ v & L(v) \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} u & (pu')' \\ v & (pv')' \end{pmatrix} = \\ &= p \det \begin{pmatrix} u & u'' \\ v & v'' \end{pmatrix} + p' \det \begin{pmatrix} u & u' \\ v & v' \end{pmatrix} = \\ &= \left(p \det \begin{pmatrix} u & u' \\ v & v' \end{pmatrix} \right)' \end{aligned}$$

□

Sea $E = \{\phi \in \mathcal{C}^2([a, b]) \mid U(\phi) = 0\}$, donde U es (3.1.2) o (3.1.3) y en este caso, $p(a) = p(b)$.

3.2.2. Corolario. (*Identidad de Green*)

Si $u, v \in E$, entonces

$$\langle u, Lv \rangle \equiv \int_a^b uL(v)dx = \int_a^b L(u)vdx \equiv \langle Lu, v \rangle$$

(Nótese que se trata del producto escalar definido en (3.1.25), para funciones reales.)

Demostración.

Por $(I - L)$ se tiene

$$\langle u, Lv \rangle - \langle Lu, v \rangle = p(b)(u(b)v'(b) - v(b)u'(b)) - p(a)(u(a)v'(a) - v(a)u'(a)) = 0,$$

si las condiciones de contorno son (3.1.2) o (3.1.3) y $p(a) = p(b)$. \square

El resultado anterior pone de manifiesto una propiedad de simetría del operador L en el espacio E . Hay una analogía con lo que ocurre en el caso de una matriz simétrica A en \mathbf{R}^N . En efecto, si A es una matriz simétrica en \mathbf{R}^N se tiene,

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad \text{para todo } x, y \in \mathbf{R}^N.$$

Los problemas de contorno verificando la identidad de Green se llaman *problemas autoadjuntos*. En este sentido el problema de Sturm-Liouville y el problema periódico son problemas autoadjuntos.

Las matrices simétricas son diagonalizables por un cambio de base; la conjetura es que, siendo el operador L simétrico sobre E , también sea diagonalizable en algún sentido.

Por esta analogía, haremos una digresión sobre la estrategia que se sigue en la diagonalización de matrices simétricas.

En primer lugar se tiene que si A es una matriz simétrica real sus *autovalores* son reales. Además el mayor de los autovalores se calcula resolviendo el siguiente problema de máximo condicionado:

Determinar el máximo de $F(x) = \langle Ax, x \rangle$ sujeto a la condición $\|x\|^2 = 1$

(Véase el texto de *W. Fleming "Functions of Several Variables" Ed. Springer Verlag 1977, página 163*, para encontrar todos los detalles.)

Una vez encontrado el autovalor λ_1 , valor máximo, y un autovector unitario e_1 donde se alcanza, se considera H , hiperplano ortogonal a e_1 . Se plantea el problema de máximos condicionados que sigue:

Determinar el máximo de $F(x) = \langle Ax, x \rangle$, sujeto a las condiciones $\|x\|^2 = 1$ y $\langle x, e_1 \rangle = 0$.

La última condición es equivalente a que $x \in H$, es decir, se considera el problema proyectado sobre H .

Su solución da el autovalor $\lambda_2 \leq \lambda_1$ y un autovector, e_2 .

De esta manera, por reiteración del proceso anterior, se determinan todos los autovalores de A .

Se trata ahora de calcular los *autovalores* de L sujeto a las condiciones de contorno homogéneas, separadas o periódicas con $p(a) = p(b)$. Para precisar damos la definición correspondiente.

3.2.3. Definición.

Sea el problema

$$(3.2.5) \quad \begin{cases} L(y) \equiv (py')' + qy = \lambda y \\ U(y) = 0, \end{cases}$$

se dice que $\lambda \in \mathbf{C}$ es un autovalor de (3.2.5) si existe solución no trivial del problema.

Si λ es un autovalor de (3.2.5), y $\phi \in E$, $\phi \neq 0$, verifica $L(\phi) = \lambda\phi$, diremos que ϕ es una autofunción correspondiente al autovalor λ .

La idea es ensayar el mismo método usado en el caso de las matrices, para calcular los autovalores de (3.2.5).

La primera dificultad es que la función

$$\mathcal{F}(\phi) = \langle L(\phi), \phi \rangle,$$

definida sobre las funciones de E , no necesariamente está acotada en términos de $\|\phi\|_2 = 1$. El lector puede pensar en funciones "pequeñas" con derivadas muy grandes para convencerse de la anterior afirmación. Puestos a poner dificultades, no está claro que exista algún autovalor para (3.2.5), cosa que en el caso de las matrices se tiene gratuitamente por aplicación del teorema fundamental del Algebra o por el teorema de Heine Borel que afirma que una función continua sobre la esfera, que es un compacto de \mathbf{R}^N , tiene máximo. No hay algo parecido para el caso que nos ocupa, el espacio E tiene dimensión infinita y entonces la correspondiente esfera no es compacta. Esto quiere decir que tendremos que trabajar más para probar que existen autovalores del problema (3.2.5).

La primera etapa en este proyecto es formal y bastante elemental. Supongamos que el problema

$$(3.2.6) \quad \begin{cases} L(y) = 0 \\ U(y) = 0, \end{cases}$$

tiene sólo solución trivial. (En caso contrario $\lambda = 0$ es autovalor y está probada la existencia).

En la hipótesis anterior para (3.2.6), podemos calcular la función de Green, $G(x, t)$, del problema de contorno, como se ha demostrado en el teorema (3.1.2). De esta forma se puede considerar también la aplicación

$$\mathcal{G} : \mathcal{C}([a, b]) \longrightarrow E \subset \mathcal{C}([a, b])$$

por

$$(3.2.7) \quad \mathcal{G}f(x) = \int_a^b G(x, t)f(t)dt,$$

siendo así \mathcal{G} el inverso de L sobre E , como prueba el teorema (3.1.3). Por tanto, si λ es un autovalor para el problema de contorno, es decir, si existe $\phi \in E$ tal que $\phi \neq 0$ verificando $L\phi = \lambda\phi$, entonces $\phi = \mathcal{G}L\phi = \lambda\mathcal{G}\phi$. En otras palabras, si λ es autovalor del problema de contorno, entonces $\mu = \frac{1}{\lambda}$ es autovalor de \mathcal{G} , inverso de L en E . Es obvio también que si μ es autovalor de \mathcal{G} , $\frac{1}{\mu}$ es autovalor del problema de contorno. De esta forma la primera conclusión es que

El estudio de los autovalores del problema de contorno, es equivalente a estudiar los autovalores de \mathcal{G} .

La primera ventaja que se aprecia de esta estrategia es que \mathcal{G} verifica una condición de acotación análoga a la que verifican las matrices, más concretamente, se tiene

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}f, f \rangle &= \int_a^b \mathcal{G}f(x)\bar{f}(x)dx \leq \\ &\leq \left(\int_a^b |\mathcal{G}f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq C\|f\|_2^2 \end{aligned}$$

tras aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwartz y la desigualdad (3.1.27). Observamos que la desigualdad anterior, es decir,

$$(3.2.8) \quad \langle \mathcal{G}f, f \rangle \leq C\|f\|_2^2,$$

es el mismo tipo de desigualdad que se obtiene para las matrices.

De otro lado, del Corolario (3.2.2) se concluye una propiedad de simetría para \mathcal{G} , es decir, si $u, v \in E$ tenemos

$$(3.2.9) \quad \langle u, Lv \rangle = \langle Lu, v \rangle.$$

Pero entonces, si $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ y llamamos $u = \mathcal{G}f$ y $v = \mathcal{G}g$, por (3.2.9) se obtiene

$$(3.2.10a) \quad \langle \mathcal{G}f, g \rangle = \langle f, \mathcal{G}g \rangle.$$

Dicho de otra manera \mathcal{G} es también simétrico sobre $\mathcal{C}([a, b])$, y además verifica (3.2.8).

Como consecuencia de la propiedad (3.2.10a) resulta que la función de Green ha de verificar la propiedad de simetría

$$(3.2.10b.) \quad G(x, t) = G(t, x), \quad x, t \in [a, b]$$

Antes de ocuparnos de la existencia de autovalores para \mathcal{G} , o bien, para el problema de Sturm-Liouville o para el problema periódico de forma equivalente, daremos algunas propiedades elementales de autovalores y autofunciones, que se desprenden de lo que hemos estudiado hasta ahora.

3.2.4. Proposición.

A) Consideremos el problema de Sturm-Liouville, es decir, (3.2.4) con las condiciones de contorno (3.1.2). Sea \mathcal{G} el correspondiente operador inverso definido por (3.2.7). Entonces,

- (1) Si λ es autovalor de \mathcal{G} , necesariamente $\lambda \in \mathbf{R}$.
- (2) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son autovalores de \mathcal{G} y ϕ_1, ϕ_2 autofunciones correspondientes, se verifica

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = 0$$

(Es decir, ϕ_1 y ϕ_2 son ortogonales respecto al producto escalar definido por (3.1.25)).

- (3) Si ϕ_1 y ϕ_2 son autofunciones correspondientes al autovalor λ de \mathcal{G} , existe $c \in \mathbf{R}$ tal que $\phi_1 = c\phi_2$. (Es decir, todo autovalor del problema de Sturm-Liouville, es simple).

B) Si se considera el problema periódico, es decir, (3.2.4) con la hipótesis $p(a) = p(b)$ y las condiciones de contorno (3.1.3), se verifican las conclusiones 1) y 2) del apartado A).

Demostración.

La prueba de (1) y (2) es idéntica en los casos A) y B). En efecto,

- (1) Por ser \mathcal{G} simétrico se tiene que si ϕ es una autofunción correspondiente a λ

$$(3.2.11) \quad 0 = \langle \mathcal{G}\phi, \phi \rangle - \langle \phi, \mathcal{G}\phi \rangle = (\lambda - \bar{\lambda})\langle \phi, \phi \rangle$$

que prueba (1).

- (2) Por el mismo argumento de simetría y teniendo en cuenta (1),

$$0 = \langle \mathcal{G}\phi_1, \phi_2 \rangle - \langle \phi_1, \mathcal{G}\phi_2 \rangle = (\lambda_1 - \lambda_2)\langle \phi_1, \phi_2 \rangle,$$

que prueba este apartado.

Con la hipótesis de que se tienen condiciones separadas probamos el apartado (3)

- (3) Si hubiese dos autofunciones u y v correspondientes al autovalor λ , consideramos el determinante wronskiano de estas dos soluciones

$$W(u, v)(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x).$$

Por verificar las condiciones de contorno se tiene

$$\begin{cases} m_1 u(a) + n_1 u'(a) = 0, \\ m_1 v(a) + n_1 v'(a) = 0, \end{cases}$$

y sustituyendo se obtiene $W(u, v)(a) = 0$. Pero entonces por ser soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden, $W(u, v)(x) = 0$ para cada $x \in [a, b]$, y por tanto son funciones linealmente dependientes, es decir, existe $c \in \mathbf{R}$ tal que $u(x) = cv(x)$. (Véase el texto de *G.F. Simmons "Ecuaciones Diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas", Ed Mc Graw Hill (1993) pag 90-91*) \square

Nota.

El problema periódico no satisface la conclusión (3) de la Proposición (3.2.4), como pone de manifiesto el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1.

Sea el problema

$$(P) \quad \begin{cases} -y'' = \lambda y, \\ y(0) = y(2\pi) \\ y'(0) = y'(2\pi) \end{cases}$$

El claro que $\{\sin kx, \cos kx\}$ son autofunciones correspondientes al autovalor $\lambda_k = k^2$, $k \in \mathbf{N}$.

Podemos considerar

$$\mathcal{G} : L^2([a, b]) \longrightarrow L^2([a, b])$$

puesto que

$$(3.2.12) \quad \mathcal{G}f(x) = \int_a^b G(x, t)f(t)dt$$

está bien definido para $f \in L^2$. Además de la desigualdad (3.2.8) se tiene

$$(3.2.13) \quad \|\mathcal{G}f\|_2 \leq c\|f\|_2,$$

como se probó en la sección 3.1.

La continuidad de $G(x, t)$ permite demostrar la continuidad de $\mathcal{G}f$ para $f \in L^2$, pero el resultado siguiente mejora esta propiedad de \mathcal{G} y establece una condición de acotación. Ambas serán importantes para demostrar la existencia de autovalores.

3.2.5. Teorema.

Sea

$$X = \{\mathcal{G}f \mid f \in L^2, \|f\|_2 \leq 1\}.$$

Entonces X verifica

1) X es uniformemente acotado, es decir, existe $M > 0$ tal que

$$|\mathcal{G}f(x)| \leq M, \quad \text{para cada } x \in [a, b] \quad \text{y cada } f \quad \text{tal que } \|f\|_2 \leq 1$$

2) X es un conjunto equicontinuo, es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in [a, b]$ tales que $|x - y| < \delta$ se verifica $|\mathcal{G}f(x) - \mathcal{G}f(y)| < \varepsilon$ para toda $\mathcal{G}f \in X$

Demostración.

- 1) La acotación uniforme es justamente la desigualdad (3.1.28), junto a que $\|f\|_2 \leq 1$.
- 2) De la misma forma la equicontinuidad, resulta de la desigualdad (3.1.29) y de que $\|f\|_2 \leq 1$. \square

La importancia del teorema (3.2.5) es que para los conjuntos de funciones verificando las hipótesis de X , se tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass para la convergencia uniforme, es decir,

Toda sucesión de funciones en X tiene una subsucesión uniformemente convergente.

Esta propiedad de X se recoge diciendo que X es *relativamente compacto*. En este sentido tenemos que

X es relativamente compacto en $\mathcal{C}([a, b])$ respecto a la convergencia uniforme.

En las hipótesis de acotación uniforme y equicontinuidad que verifica X , la propiedad de Bolzano-Weierstrass fue demostrada por Ascoli y su resultado fué generalizado por Arzelá. Pasamos a dar una prueba del lema de Ascoli-Arzelá para conveniencia del lector.

3.2.6. Lema. (Ascoli-Arzelá)

Sea $K = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N] \subset \mathbf{R}^N$, intervalo cerrado y acotado. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ sucesión de funciones continuas en K con valores reales verificando

- i) (Acotación uniforme.) Existe una constante M , $0 < M < \infty$, tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in K$ y todo $n \in \mathbf{N}$.
- ii) (Equicontinuidad.) Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in K$ verifican $|x - y| < \delta$ entonces $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ cualquiera que sea $n \in \mathbf{N}$.

Entonces existe una subsucesión $\{f_{k_n}\}_{n \in \mathbf{N}}$ que converge uniformemente.

Demostración.

Por la hipótesis i) se tiene que

$$\cup_{n \in \mathbf{N}} \{f_n(x) \mid x \in K\} \subset [-M, M],$$

es decir, el conjunto formado por las imágenes de la sucesión en \mathbf{R} , es acotado. Podemos ahora usar la hipótesis ii) para la sucesión $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, con lo que obtenemos una sucesión $\delta_n > 0$, que podemos suponer decreciente, tal que si $x, y \in K$, $|x - y| < \delta_n$,

$$|f_m(x) - f_m(y)| < \frac{1}{n} \quad \text{cualquiera que sea } m \in \mathbf{N}.$$

Para cada $n \in \mathbf{N}$ consideramos el correspondiente δ_n y del recubrimiento por bolas de radio δ_n de K extraemos, por compacidad, una familia finita de bolas, que continúa cubriendo a K ,

$$\{B(x_1^n), \dots, B(x_{r(n)}^n)\}.$$

Una vez fijadas todas las bolas y sus centros, utilizamos el proceso diagonal de Cantor en la siguiente forma. Por la propiedad de Bolzano-Weierstrass en la recta real, para $\varepsilon_1 = 1$ tomamos una subsucesión $\{f_n^1\}_{n \in \mathbf{N}}$ tal que

$$|f_n^1(x_j^1) - f_m^1(x_j^1)| < 1, \quad \text{para todo } j = 1, \dots, r(1).$$

Por análogo argumento, para $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ existe una subsucesión de la anterior,

$$\{f_n^2\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \{f_n^1\}_{n \in \mathbf{N}},$$

de forma que

$$|f_n^2(x_j^2) - f_m^2(x_j^2)| < \frac{1}{2}, \quad \text{para todo } j = 1, \dots, r(2).$$

Así, por recurrencia, para $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ construimos una subsucesión $\{f_n^k\}_{n \in \mathbf{N}}$ de $\{f_n^{k-1}\}_{n \in \mathbf{N}}$, de forma que

$$|f_n^k(x_j^k) - f_m^k(x_j^k)| < \frac{1}{k}, \quad \text{para todo } j = 1, \dots, r(k).$$

Por tanto, para cada $x \in K$ y cada $k \in \mathbf{N}$ podemos encontrar $j \in \{1, \dots, r(k)\}$ tal que $|x - x_j^k| < \delta_k$ y entonces

$$|f_n^k(x) - f_m^k(x)| \leq |f_n^k(x) - f_n^k(x_j^k)| + |f_n^k(x_j^k) - f_m^k(x_j^k)| + |f_m^k(x_j^k) - f_m^k(x)| \leq \frac{3}{k},$$

donde el primer y tercer sumando se acotan por $\frac{1}{k}$ en virtud de la equicontinuidad, y el segundo por la construcción anterior. En resumen se tiene

$$\sup_{x \in K} |f_n^k(x) - f_m^k(x)| \leq \frac{3}{k}.$$

Tomamos la *subsucesión diagonal*, es decir, $\{f_n^n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \{f_n^k\}_{n \in \mathbf{N}}$, para todo $k \in \mathbf{N}$

Observamos que por construcción la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ verifica que dado $\varepsilon > 0$, tomando $k_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$ y $m, n > k_0$, entonces

$$(*) \quad \sup_{x \in K} |f_n^n(x) - f_m^m(x)| \leq 3\varepsilon,$$

que es lo que se entiende como que la sucesión diagonal es *uniformemente de Cauchy*. Fijado $x \in K$ la propiedad (*) implica que existe límite puntual, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^n(x) = f(x).$$

Pero de otra parte (*) implica que en cada $x \in K$, si $n > k_0$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |f_n^n(x) - f_m^m(x)| = |f_n^n(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon,$$

es decir, la convergencia es uniforme. \square

Podemos ahora parafrasear los resultados obtenidos para \mathcal{G} en el siguiente corolario.

2.3.6' Corolario.

Si $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}} \in L^2$ es tal que $\|f_n\|_2 \leq 1$, entonces de $\{\mathcal{G}f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ se puede obtener una subsucesión uniformemente convergente.

La abstracción de esta idea a espacios generales es el concepto de *operador compacto*, donde la convergencia es la propia de cada espacio. Observemos que en este sentido podemos decir que *el operador \mathcal{G} es compacto como aplicación de L^2 en L^2* ; en efecto si $\{\mathcal{G}f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformemente, entonces también converge respecto a la norma de L^2 .

Dado el operador

$$\mathcal{G} : L^2([a, b]) \longrightarrow L^2([a, b])$$

definido en (3.2.12), por verificar la acotación (3.2.13), permite definir

$$(3.2.14) \quad \|\mathcal{G}\| = \sup_{\|f\|_2=1} \|\mathcal{G}f\|_2.$$

La fórmula (3.2.14) define una norma sobre la clase de las aplicaciones lineales, T , de L^2 en sí mismo, tales que existe $c > 0$ verificando

$$\|Tf\|_2 \leq c\|f\|_2.$$

Esta afirmación es un buen ejercicio que se deja al cuidado del lector.

Retomamos la línea argumental y vamos a probar un resultado técnico, que permitirá intuir la similitud en el cálculo de autovalores de \mathcal{G} , con lo que se hace para calcular los de las matrices.

3.2.7. Lema.

Sea \mathcal{G} definido en (3.2.12) y $\|\mathcal{G}\|$ definido por (3.2.14). Entonces se verifica

$$(3.2.15) \quad \|\mathcal{G}\| = \sup_{u \in \mathcal{C}([a,b]), \|u\|_2=1} |\langle \mathcal{G}u, u \rangle|.$$

Demostración.

Llamemos

$$\eta = \sup_{u \in \mathcal{C}([a,b]), \|u\|_2=1} |\langle \mathcal{G}u, u \rangle|.$$

Si $u \in \mathcal{C}([a, b])$ y $\|u\|_2 = 1$, la desigualdad de Cauchy-Schwartz prueba que

$$|\langle \mathcal{G}u, u \rangle| \leq \|\mathcal{G}u\|_2 \|u\|_2 \leq \|\mathcal{G}\|,$$

es decir,

$$(3.2.16) \quad \eta \leq \|\mathcal{G}\|.$$

Para probar que $\eta \geq \|\mathcal{G}\|$, consideramos para $u, v \in \mathcal{C}([a, b])$ tales que $\|u\|_2 = 1$, $\|v\|_2 = 1$,

$$(3.2.17) \quad \begin{aligned} \langle \mathcal{G}(u+v), u+v \rangle &= \\ &= \langle \mathcal{G}u, u \rangle + \langle \mathcal{G}v, v \rangle + 2\langle \mathcal{G}u, v \rangle \leq \\ &\leq \eta \|u+v\|_2^2, \end{aligned}$$

por la definición de η y por ser \mathcal{G} simétrico. De igual manera se tiene que

$$(3.2.18) \quad \begin{aligned} \langle \mathcal{G}(u-v), u-v \rangle &= \\ &= \langle \mathcal{G}u, u \rangle + \langle \mathcal{G}v, v \rangle - 2\langle \mathcal{G}u, v \rangle \geq \\ &\geq -\eta \|u-v\|_2^2. \end{aligned}$$

Sustrayendo de (3.2.17), (3.2.18) se obtiene

$$(3.2.19) \quad 4\langle \mathcal{G}u, v \rangle \leq \eta(\|u+v\|_2^2 + \|u-v\|_2^2) = 2\eta(\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2),$$

donde la última identidad es conocida como *identidad del paralelogramo* por su obvia interpretación geométrica, ($u+v$ y $u-v$ son las diagonales del "paralelogramo" de lados u y v).

Como $\|u\|_2 = 1$, tomando en (3.2.19) $v = \frac{\mathcal{G}u}{\|\mathcal{G}u\|_2}$ se tiene

$$(3.2.20) \quad 4\langle \mathcal{G}u, \frac{\mathcal{G}u}{\|\mathcal{G}u\|_2} \rangle \leq 2\eta(\|u\|_2^2 + 1) = 4\eta,$$

es decir,

$$(3.2.21) \quad \|\mathcal{G}u\|_2 \leq \eta,$$

y entonces

$$(3.2.22) \quad \|\mathcal{G}\| \leq \eta,$$

que con (3.2.16) prueba el resultado. \square

El lema anterior permite conjeturar el valor del mayor autovalor de \mathcal{G} , a la luz de lo que ocurre en el caso de las matrices. Es decir, si consideramos

$$\mathcal{F}(u) = |\langle \mathcal{G}u, u \rangle|,$$

el autovalor mayor debe ser

$$|\lambda| = \sup_{u \in \mathcal{C}([a,b]), \|u\|_2=1} \mathcal{F}(u),$$

para lo cual habrá que encontrar $u \in \mathcal{C}([a,b])$ de forma que se alcance el supremo.

El resultado probado en el lema (3.2.7), en combinación con la anterior conjetura, sugiere de manera natural enunciar el resultado siguiente.

3.2.8. Teorema.

Sea $\lambda = \|\mathcal{G}\|$, entonces λ o $-\lambda$ es un autovalor de \mathcal{G} .

Demostración.

En virtud del lema (3.2.7), existe una sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{C}([a,b])$, $\|u_n\|_2 = 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$, verificando

$$(3.2.23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle \mathcal{G}u_n, u_n \rangle| = \|\mathcal{G}\| = \lambda.$$

De esta forma podemos suponer que existe una subsucesión tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{G}u_{k_n}, u_{k_n} \rangle = \|\mathcal{G}\| = \lambda,$$

o bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{G}u_{k_n}, u_{k_n} \rangle = \|\mathcal{G}\| = -\lambda.$$

Supondremos, sin pérdida de generalidad, que ocurre lo primero y denotamos de nuevo a la subsucesión como $\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}}$. Por el lema de Ascoli-Arzelá (3.2.6) y el teorema (3.2.5) se tiene que existe una subsucesión, la cual denotamos por $\{\mathcal{G}u_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{C}([a,b])$, que converge uniformemente a una función continua ϕ . Es decir,

$$(3.2.24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}u_n = \phi \quad \text{uniformemente.}$$

Entonces también se tiene

$$(3.2.25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{G}u_n - \phi\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |\mathcal{G}u_n(x) - \phi(x)|^2 dx = 0$$

y se continúa verificando

$$(3.2.26) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{G}u_n, u_n \rangle = \lambda.$$

De la continuidad de la norma y de (3.2.25) se concluye

$$(3.2.27) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \|\mathcal{G}u_n\|_2 - \|\phi\|_2 \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{G}u_n - \phi\|_2^2 = 0,$$

es decir

$$(3.2.28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{G}u_n\|_2 = \|\phi\|_2.$$

Probaremos que ϕ verifica

$$\mathcal{G}\phi = \lambda\phi,$$

con lo cual quedará probado que λ es autovalor de \mathcal{G} . En primer término probamos que $\phi \neq 0$. En efecto,

$$(3.2.29) \quad 0 \leq \|\mathcal{G}u_n - \lambda u_n\|_2^2 = \|\mathcal{G}u_n\|_2^2 + \lambda^2 \|u_n\|_2^2 - 2\lambda \langle \mathcal{G}u_n, u_n \rangle,$$

pasando al límite, teniendo en cuenta (3.2.26), (3.2.28) y que $\|u_n\|_2 = 1$, se obtiene

$$(3.2.30) \quad 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{G}u_n - \lambda u_n\|_2^2 = \|\phi\|_2^2 - \lambda^2,$$

por tanto,

$$(3.2.31) \quad \|\phi\|_2^2 \geq \lambda^2 > 0,$$

luego $\phi \neq 0$.

Por otra parte la definición de λ implica que

$$(3.2.32) \quad \|\mathcal{G}u_n\|_2^2 \leq \lambda^2,$$

por tanto de (3.2.29) se concluye

$$(3.2.33) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{G}u_n - \lambda u_n\|_2^2 \leq 2\lambda^2 - 2\lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{G}u_n, u_n \rangle = 0.$$

Entonces por la propiedad triangular

$$(3.2.34) \quad \begin{aligned} 0 &\leq \|\mathcal{G}\phi - \lambda\phi\|_2 \leq \\ &\leq \|\mathcal{G}\phi - \mathcal{G}(\mathcal{G}u_n)\|_2 + \|\mathcal{G}(\mathcal{G}u_n) - \lambda\mathcal{G}u_n\|_2 + \|\lambda\mathcal{G}u_n - \lambda\phi\|_2 \leq \\ &\leq \|\mathcal{G}\| \|\phi - \mathcal{G}u_n\|_2 + \|\mathcal{G}\| \|\mathcal{G}u_n - \lambda u_n\|_2 + \lambda \|\mathcal{G}u_n - \phi\|_2 \end{aligned}$$

El primer y tercer sumando tienden a cero por (3.2.25) y el segundo tiende a cero por (3.2.33). En consecuencia, $\|\mathcal{G}\phi - \lambda\phi\|_2 = 0$.

Así se tiene $\mathcal{G}\phi = \lambda\phi$ con $\phi \neq 0$, que era lo que queríamos demostrar. \square

Probada la existencia de autovalores para \mathcal{G} o, equivalentemente del problema de contorno (3.2.4), nos vamos a preocupar ahora por saber cuántos hay. El estudio de las autofunciones como *base ortonormal* de E y de L^2 , en el sentido que se precisará, será el segundo objetivo del resto de la sección.

3.2.9. Teorema.

El operador \mathcal{G} definido por (3.2.12) tiene una sucesión infinita de autovalores, $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbf{N}}$.

Demostración.

Sea λ_0 el autovalor obtenido en el teorema (3.2.8), y sea ϕ_0 autofunción correspondiente tal que $\|\phi_0\|_2 = 1$.

Consideramos la función

$$G_1(x, t) = G(x, t) - \lambda_0 \phi_0(x) \phi_0(t),$$

que verifica las mismas propiedades de regularidad que la función de Green, $G(x, t)$. Por esta razón si se define

$$\mathcal{G}_1 : \mathcal{C}([a, b]) \longrightarrow \mathcal{C}([a, b])$$

por

$$(3.2.35) \quad \mathcal{G}_1 f(x) = \int_a^b G_1(x, t) f(t) dt,$$

se puede definir su extensión a L^2 y \mathcal{G}_1 resulta ser simétrico y compacto, por los mismos argumentos que se usaron para probar las mismas propiedades para \mathcal{G} . Podemos aplicar a \mathcal{G}_1 el teorema (3.2.8), por el cual, definiendo

$$(3.2.36) \quad \|\mathcal{G}_1\| = \sup_{u \in \mathcal{C}([a, b]), \|u\|_2=1} |\langle \mathcal{G}_1 u, u \rangle|,$$

bien $\lambda_1 = \|\mathcal{G}_1\|$, o bien $\lambda_1 = -\|\mathcal{G}_1\|$, es un autovalor de \mathcal{G}_1 . Sea ϕ_1 autofunción normalizada, es decir

$$(3.2.37) \quad \begin{cases} \mathcal{G}_1 \phi_1 = \lambda_1 \phi_1 \\ \|\phi_1\|_2 = 1. \end{cases}$$

Probaremos que ϕ_1 es una autofunción correspondiente al autovalor λ_1 para \mathcal{G} . Pero si $f \in \mathcal{C}([a, b])$, se tiene

$$(3.2.38) \quad \begin{aligned} \langle \mathcal{G}_1 f, \phi_0 \rangle &= \int_a^b \mathcal{G}_1 f(x) \phi_0(x) dx = \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b G_1(x, t) f(t) dt \right) \phi_0(x) dx = \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b G(x, t) \phi_0(x) dx \right) f(t) dt - \lambda_0 \int_a^b \left(\int_a^b f(t) \phi_0(t) dt \right) \phi_0^2(x) dx \equiv \\ &\equiv \lambda_0 \int_a^b f(t) \phi_0(t) dt - \lambda_0 \int_a^b f(t) \phi_0(t) dt = 0, \end{aligned}$$

ya que ϕ_0 es autofunción de \mathcal{G} y $G(x, t) = G(t, x)$, por tratarse de la función de Green de un problema autoadjunto. La condición de ortogonalidad (3.2.38), en particular, implica que

$$(3.2.39) \quad 0 = \langle \mathcal{G}_1 \phi_1, \phi_0 \rangle = \lambda_1 \langle \phi_1, \phi_0 \rangle,$$

es decir, ϕ_1 es ortogonal a ϕ_0 y entonces

$$(3.2.40) \quad \begin{aligned} \mathcal{G}\phi_1(x) &= \int_a^b G(x, t)\phi_1(t)dt = \\ &= \int_a^b (G_1(x, t) + \lambda_0\phi_0(x)\phi_0(t))\phi_1(t)dt = \\ &= \int_a^b G_1(x, t)\phi_1(t)dt = \mathcal{G}_1\phi_1(x) = \\ &= \lambda_1\phi_1(x). \end{aligned}$$

Una vez probado que λ_1 es un autovalor de \mathcal{G} y ϕ_1 una autofunción procedemos por inducción. Supongamos que se han encontrado $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}\}$, autovalores y

$$\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{m-1}\}$$

autofunciones correspondientes, formando un sistema ortonormal.

Definimos

$$(3.2.41) \quad G_m(x, t) = G_{m-1}(x, t) - \lambda_{m-1}\phi_{m-1}(x)\phi_{m-1}(t) = G(x, t) - \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j\phi_j(x)\phi_j(t)$$

El operador asociado a G_m se define por

$$\mathcal{G}_m f(x) = \int_a^b G_m(x, t)f(t)dt,$$

y goza exactamente de las mismas propiedades de regularidad que \mathcal{G} por lo que se puede repetir el mismo proceso que hemos seguido con \mathcal{G}_1 . Observamos que se trata de ir proyectando el problema de maximización, sobre el ortogonal de las autofunciones calculadas en etapas previas y siempre sometido a la restricción $\|u\|_2 = 1$.

Este proceso iterativo se puede seguir siempre que $\|\mathcal{G}_m\| \neq 0$. Pero si para algún $m \in \mathbf{N}$ se llegase a que $\|\mathcal{G}_m\| = 0$, o, lo que es igual, a que $\mathcal{G}_m \equiv 0$, se tendría para $f \in \mathcal{C}([a, b])$ que

$$(3.2.42) \quad \begin{aligned} 0 &= L\mathcal{G}_m f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j L\phi_j(x) \int_a^b f(t)\phi_j(t)dt = \\ &= f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \phi_j(x)\langle f, \phi_j \rangle, \end{aligned}$$

dado que, por ser L inverso de \mathcal{G} , se verifica $L\phi_j(x) = \frac{1}{\lambda_j}\phi_j(x)$.

Pero (3.2.42) implica que toda función continua f sería una suma finita de autofunciones, las cuales tienen todas dos derivadas continuas, por tanto, lo mismo le debería ocurrir a f , lo cual es una contradicción que prueba que $\mathcal{G}_m \neq 0$ para todo $m \in \mathbf{N}$. Por tanto, \mathcal{G} tiene una sucesión de autovalores. \square

Por la construcción hecha en el teorema (3.2.9) se concluye que

$$(3.2.43) \quad |\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}| \geq \dots$$

Probaremos un resultado mejor que el anterior, es decir, que

$$(3.2.44) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = 0,$$

con el cual obtendremos la *diagonalización* de \mathcal{G} , y como consecuencia, que la sucesión de autovalores construida en el teorema (3.2.9) contiene **todos los autovalores de \mathcal{G}** .

A tal efecto, vamos a utilizar las siguientes extensiones de la Geometría Euclídea a nuestro contexto. Estas extensiones fueron elaboradas por D. Hilbert y dieron lugar a introducirlas desde un punto de vista abstracto, constituyendo la teoría de *espacios de Hilbert*. El ejemplo prototípico de tales espacios es $L^2([a, b])$, y lo importante es que su norma, definida en (3.1.26), es inducida por el producto escalar definido en (3.1.25).

Dada una sucesión en L^2 , $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, por analogía con \mathbf{R}^N , diremos que es un *sistema ortonormal* si se verifica

$$\langle \phi_j, \phi_k \rangle = \delta_{jk},$$

siendo δ_{jk} las *deltas de Krönecker*, es decir,

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k. \end{cases}$$

El ejemplo de sistema ortonormal que aquí nos va a ocupar, son las autofunciones de \mathcal{G} obtenidas en el teorema (3.2.9).

3.2.10. Definición.

Sea $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ un sistema ortonormal en L^2 . Sea $f \in L^2$.

i) Se define la *proyección de f sobre ϕ_k* por

$$\langle f, \phi_k \rangle \phi_k(x).$$

ii) Los *coeficientes de Fourier de f respecto a $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$* se definen como la sucesión

$$\{\langle f, \phi_n \rangle\}_{n \in \mathbf{N}}.$$

Dada la sucesión de autofunciones obtenidas en el teorema (3.2.9), normalizadas, podemos escribir el *desarrollo en serie de autofunciones* de una función $f \in L^2$ como sigue

$$(3.2.45) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k(x).$$

Probaremos que (3.2.45) representa a f en el sentido de L^2 , como se precisará, y además se verifica un teorema de Pitágoras generalizado a esta situación. Comenzamos con una primera aproximación a estos resultados conocida como *Desigualdad de Bessel*.

3.2.11. Lema.

Sea $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset L^2([a, b])$ sistema ortonormal de funciones.

Sea $f \in L^2([a, b])$, entonces

$$(3.2.46) \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2, \quad (\text{Desigualdad de Bessel}).$$

Demostración.

Fijado $N \in \mathbf{N}$ y teniendo en cuenta la ortogonalidad, se tiene

$$0 \leq \|f - \sum_{k=0}^N \langle f, \phi_k \rangle \phi_k\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^N |\langle f, \phi_k \rangle|^2.$$

Como la desigualdad anterior es cierta cualquiera que sea N , se concluye (3.2.46). \square

Para probar (3.2.44), consideremos para cada λ_n la autofunción ϕ_n normalizada.

Definimos $\psi_n(x, t) = \phi_n(x)\phi_n(t)$. La sucesión $\{\psi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ es un sistema ortonormal en $L^2([a, b] \times [a, b])$, como se comprueba directamente. Además los coeficientes de Fourier de la función de Green se calculan fácilmente,

$$\begin{aligned} \langle G, \psi_n \rangle &= \int_a^b \int_a^b G(x, t) \psi_n(x, t) dx dt = \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b G(x, t) \phi_n(t) dt \right) \phi_n(x) dx = \int_a^b \lambda_n \phi_n^2(x) dx = \lambda_n. \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad de Bessel para este caso particular, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 \leq \int_a^b \int_a^b |G(x, t)|^2 dx dt < \infty.$$

El criterio de Cauchy implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = 0$$

que es (3.2.44).

El resultado fundamental es el siguiente resultado de convergencia del desarrollo en serie de autofunciones.

3.2.12. Teorema.

Sea \mathcal{G} el operador de Green para el problema autoadjunto (3.2.4), definido por (3.2.12). Sean $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ y $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ sucesiones de autovalores y autofunciones obtenidas en el teorema (3.2.9). Sea E el conjunto de funciones $u \in \mathcal{C}^2([a, b])$ verificando las condiciones de contorno, $U(u) = 0$. Entonces para cada $u \in E$

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u, \phi_n \rangle \phi_n(x),$$

donde la convergencia de la serie es uniforme en $[a, b]$.

Demostración.

Dada $u \in E$ llamamos $f = L(u)$, que es una función continua. Entonces a su vez tenemos que $u = \mathcal{G}f$. Por tanto,

$$(3.2.47) \quad \begin{aligned} \langle u, \phi_n \rangle &= \langle \mathcal{G}f, \phi_n \rangle = \\ &= \langle f, \mathcal{G}\phi_n \rangle = \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle, \end{aligned}$$

ya que \mathcal{G} es simétrico. En esta nueva formulación debemos probar que

$$(3.2.48) \quad \mathcal{G}f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x),$$

en el sentido de la convergencia uniforme en $[a, b]$. Pero para cada $m \in \mathbf{N}$ se tiene que

$$(3.2.49) \quad \|\mathcal{G}f - \sum_{n=0}^{m-1} \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n\|_2 = \|\mathcal{G}_m f\|_2 \leq \|\mathcal{G}_m\| \|f\|_2 = |\lambda_m| \|f\|_2,$$

donde \mathcal{G}_m es el operador correspondiente a la función G_m definida en (3.2.41) y donde la última igualdad es también obtenida en el teorema (3.2.9).

Como consecuencia de (3.2.44) y (3.2.49) tenemos que

$$(3.2.50) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathcal{G}f - \sum_{n=0}^{m-1} \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n\|_2 = 0.$$

Ahora, por (3.1.28), concluimos que

$$(3.2.51) \quad \begin{aligned} & \left| \sum_{n=p}^{n=q} \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) \right| = \left| \mathcal{G} \left(\sum_{n=p}^{n=q} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) \right) \right| \leq \\ & \leq \sup_{(x,t) \in [a,b] \times [a,b]} |G(x,t)| (b-a)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=p}^{n=q} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

La desigualdad de Bessel implica que el último término en (3.2.51) tiende a cero cuando $p, q \rightarrow \infty$, o en otras palabras que las funciones *sumas parciales* de (3.2.48),

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x),$$

son uniformemente de Cauchy en $[a, b]$. Por tanto existe una función continua $\phi(x)$ tal que $S_N(x) \rightarrow \phi(x)$, uniformemente sobre $[a, b]$ cuando $N \rightarrow \infty$. Pero por (3.2.50) se tiene que S_N converge en $L^2([a, b])$ a $\mathcal{G}f$, por consiguiente,

$$\phi \equiv \mathcal{G}f$$

y así se verifica (3.2.48) en el sentido de la convergencia uniforme que es lo que queríamos demostrar. \square

3.2.13. Corolario. (Identidad de Parseval)

En las hipótesis del teorema (3.2.12), si $u \in E$, se verifica

$$(3.2.52) \quad \|u\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle u, \phi_n \rangle|^2.$$

Demostración.

Por el resultado del teorema (3.2.12)

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

en el sentido de la convergencia uniforme. Entonces,

$$\int_a^b |u(x)|^2 dx = \int_a^b \left| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \langle u, \phi_n \rangle \phi_n(x) \right) u(x) \right| dx = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle u, \phi_n \rangle|^2$$

□

Podemos leer el resultado anterior como una extensión del teorema de Pitágoras al caso de *dimensión no finita*. De hecho pone de manifiesto que la sucesión de autofunciones es *base* en algún sentido. Evidentemente no es una base en el sentido del Álgebra, pues ello requeriría que pudiésemos expresar cada función como una combinación lineal finita. Lo que (3.2.52) significa es que u es límite de una sucesión de combinaciones lineales de autofunciones, cuyos coeficientes se calculan por proyección ortogonal. Este concepto generalizado de base es muy útil en Análisis y se conoce como *base hilbertiana*. El corolario anterior permite una extensión interesante.

No es difícil demostrar que E definido para las condiciones separadas y para las periódicas es denso en $L^2([a, b])$. De hecho éste resultado será una consecuencia del teorema de Weierstrass que probamos en la sección 3.

Este resultado de densidad junto al resultado anterior, nos permite establecer la siguiente consecuencia importante.

3.2.14. Corolario.

Si $f \in L^2([a, b])$ se verifica

$$(3.2.53) \quad \|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, \phi_n \rangle|^2.$$

Demostración.

Para $\varepsilon > 0$ sea $u \in E$ tal que $\|u - f\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}$. Entonces

$$\begin{aligned} \left| \|f\|_2 - \left(\sum_{n=0}^N |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| &\leq \left\| f - \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|_2 \leq \\ &\leq \|f - u\|_2 + \left\| u - \sum_{n=0}^N \langle u, \phi_n \rangle \phi_n \right\|_2 + \left\| \sum_{n=0}^N \langle f - u, \phi_n \rangle \phi_n \right\|_2 \leq \\ &\leq 2\|f - u\|_2 + \left\| u - \sum_{n=0}^N \langle u, \phi_n \rangle \phi_n \right\|_2 \leq \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \left\| u - \sum_{n=0}^N \langle u, \phi_n \rangle \phi_n \right\|_2, \end{aligned}$$

donde se ha aplicado la desigualdad de Bessel. Usando el teorema (3.2.12) se acaba la prueba. □

Como consecuencia del corolario (3.2.13) se tiene también que:

Los autovalores de \mathcal{G} son **exactamente** los obtenidos en el teorema (3.2.9).

En efecto, si existiese un autovalor $\lambda \neq \lambda_n$ para todo $n \in \mathbf{N}$ y fuese $\phi \neq 0$ la autofunción correspondiente, se tendría que ϕ es ortogonal a todas las autofunciones ϕ_n , en virtud de la proposición (3.2.4).

Pero entonces según el corolario (3.2.13)

$$\|\phi\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle \phi, \phi_n \rangle|^2 \equiv 0,$$

lo que es una contradicción con el hecho de ser $\phi \neq 0$ por suponer que es una autofunción.

Podemos resumir los resultados anteriores en el siguiente teorema.

3.2.15. Teorema.

El operador \mathcal{G} definido por (3.2.12) tiene exactamente una sucesión de autovalores que, además verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = 0.$$

En el caso de las condiciones de variables separadas, es decir, en el caso del problema de Sturm-Liouville, los autovalores son simples. Si referimos el operador a la base hilbertiana ortonormal formada por las autofunciones $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, aparece *diagonalizado* en el sentido que

$$\mathcal{G}\phi_n = \lambda_n \phi_n.$$

De esta manera si, por ejemplo, $f \in \mathcal{C}([a, b])$ podemos escribir

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

por los resultados anteriores. Entonces

$$(3.2.54) \quad y(x) = \mathcal{G}f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x),$$

es decir, la solución del problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} L(y) = f \\ U(y) = 0 \end{cases}$$

es representada por la serie (3.2.54).

Análogo resultado se tiene para el problema periódico.

3.3.- El problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el disco unidad de \mathbf{R}^2 . Convergencia de series de Fourier.

La primera aplicación del método de separación de variables que realizaremos es el estudio del problema

$$(3.3.1) \quad \begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{si } x^2 + y^2 < 1 \\ u(x, y) = g(x, y) & \text{si } x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

es decir, el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace, siendo

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy}.$$

Supondremos que g es continua en la circunferencia unidad.

La simetría del problema (3.3.1) sugiere utilizar coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Calculando directamente obtenemos

$$(3.3.2) \quad \begin{cases} r_x = \cos \theta & \theta_x = -\frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \\ r_y = \operatorname{sen} \theta & \theta_y = \frac{\cos \theta}{r} \end{cases}$$

y en consecuencia,

$$(3.3.3) \quad \begin{cases} r_{xx} = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{r} & \theta_{xx} = \frac{2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{r^2} \\ r_{yy} = \frac{\cos^2 \theta}{r} & \theta_{yy} = -\frac{2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta}{r^2}, \end{cases}$$

por lo que

$$(3.3.4) \quad \begin{cases} u_{xx} = u_{rr} \cos^2 \theta + u_r \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{r} - 2u_{r\theta} \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{r} + u_{\theta\theta} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{r^2} + 2u_\theta \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{r^2}, \\ u_{yy} = u_{rr} \operatorname{sen}^2 \theta + u_r \frac{\cos^2 \theta}{r} + 2u_{r\theta} \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{r} + u_{\theta\theta} \frac{\cos^2 \theta}{r^2} - 2u_\theta \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{r^2}. \end{cases}$$

Entonces la ecuación de Laplace en coordenadas polares se escribe de la manera siguiente

$$(3.3.5) \quad 0 = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2}.$$

Llamando $f(\theta) = g(\cos \theta, \sin \theta)$, resulta ser una función continua y 2π -periódica, es decir, $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$. Análogamente, llamando de nuevo u a la composición, es decir, $u(r, \theta) \equiv u(r \cos \theta, r \sin \theta)$, se obtiene $u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi)$.

En resumen, el problema (3.3.1) en coordenadas polares resulta ser

$$(3.3.6) \quad \begin{cases} (1) & u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = 0 \quad \text{para } (r, \theta) \in (0, 1) \times [0, 2\pi] \\ (2) & u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi) \\ (3) & u(1, \theta) = f(\theta) \quad \text{en } \theta \in [0, 2\pi] \\ (4) & u \text{ continua en } [0, 1] \times [0, 2\pi] \end{cases}$$

Para resolver el problema (3.3.6) comenzamos buscando soluciones de (1) que sean de la forma $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Se ha de verificar entonces

$$(3.3.7) \quad (r^2 R''(r) + rR'(r))\Theta(\theta) + R(r)\Theta''(\theta) = 0,$$

es decir,

$$(3.3.8) \quad \frac{(r^2 R''(r) + rR'(r))}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = c,$$

donde necesariamente c es constante. La ecuación diferencial en R , es de las llamadas de tipo Euler. Para este tipo de ecuaciones se buscan soluciones de la forma $R(r) = r^k$. Sustituyendo en la ecuación diferencial para R en (3.3.8) se concluye que para que r^k sea solución se debe verificar la *ecuación indicial*

$$(3.3.9) \quad k^2 - c = 0.$$

Si $c \neq 0$, los dos valores de k dan dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (3.3.8) para R . Si $c = 0$, la integración de la ecuación puede hacerse aun más fácilmente por rebajamiento de orden. En resumen, las soluciones de (3.3.8) en la parte en R son:

$$(3.3.10) \quad \begin{cases} R(r) = ar^{\sqrt{c}} + br^{-\sqrt{c}} & \text{si } c > 0 \\ R(r) = a + b \log r & \text{si } c = 0 \\ R(r) = ar^{i\sqrt{-c}} + br^{-i\sqrt{-c}} & \text{si } c < 0. \end{cases}$$

La ecuación que se obtiene en (3.3.8) para $\Theta(\theta)$ es

$$(3.3.8') \quad \Theta''(\theta) + c\Theta(\theta) = 0,$$

que por integración da

$$(3.3.11) \quad \begin{cases} \Theta(\theta) = Ae^{i\theta\sqrt{c}} + Be^{-i\theta\sqrt{c}} & \text{si } c > 0 \\ \Theta(\theta) = A + B\theta & \text{si } c = 0 \\ \Theta(\theta) = Ae^{\theta\sqrt{-c}} + Be^{-\theta\sqrt{-c}} & \text{si } c < 0. \end{cases}$$

Si se impone que se verifique (2) en el problema (3.3.6) resulta, que necesariamente ha de ser $c = n^2$ y para que se satisfaga (4), ha de ser $b = 0$ en (3.3.10). Entonces

$$(3.3.12) \quad \begin{cases} u_0(r, \theta) = 1 \\ u_n(r, \theta) = r^n (ae^{in\theta} + be^{-in\theta}) \quad \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

Podemos escribir (3.3.12) como

$$(3.3.13) \quad \{u_n(r, \theta)\}_{-\infty}^{\infty} = \{r^{|n|} e^{in\theta}\}_{n \in \mathbf{Z}}.$$

Queda, por último, verificar la condición (3) en (3.3.6). Para ello conjeturamos como solución una función de la forma

$$(3.3.14) \quad u(r, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

debiéndose verificar

$$(3.3.15) \quad f(\theta) = u(1, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

Como $\{e^{in\theta}\}_{n \in \mathbf{Z}}$ es la familia de autofunciones del problema con condiciones periódicas en $[-\pi, \pi]$ para la ecuación (3.3.8'), es decir,

$$\begin{cases} y'' + cy = 0 \\ y(-\pi) = y(\pi) \\ y'(-\pi) = y'(\pi), \quad \text{donde } c = n^2, \end{cases}$$

los coeficientes de Fourier de f respecto a $\{e^{in\theta}\}_{n \in \mathbf{Z}}$ son

$$(3.3.16) \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds.$$

Supuesta f continua, la Identidad de Parseval (corolario (3.2.14)) implica que

$$(3.2.17) \quad \|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2,$$

siendo cada a_n el coeficiente de Fourier de f definido por (3.3.16). Por tanto, en particular, la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ está acotada. De esta forma se tiene que (3.3.14)

define una función continua en $0 \leq r < 1$. Además, derivando término a término (3.3.14) respecto a r o respecto a θ se obtiene una serie mayorante

$$(3.3.18) \quad A \sum_{-\infty}^{\infty} |n| r^{|n|},$$

que converge uniformemente en $0 \leq r < 1$. Por tanto, la función definida por (3.3.14), cuyos coeficientes son calculados en (3.3.16), es una función con derivadas primeras continuas en $[0, 1) \times [0, 2\pi]$. Un argumento de recurrencia pone de manifiesto que la función u definida por (3.3.14), es indefinidamente diferenciable en $[0, 1) \times [0, 2\pi]$ y como cada sumando de la serie es solución de la ecuación de la Laplace, también lo es u .

El único detalle que queda por establecer es que

$$(3.3.19) \quad \lim_{r \rightarrow 1} u(r, \theta) = f(\theta),$$

que es la condición (3) del problema (3.3.6).

Para resolver este último problema, comenzamos expresando u detalladamente, notando que por las observaciones anteriores los cálculos siguientes están justificados si $0 \leq r < 1$

$$(3.3.20) \quad \begin{aligned} u(r, \theta) &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta} = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{in(\theta-s)} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left(\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-s)} \right) ds. \end{aligned}$$

Pero además podemos calcular explícitamente la suma de la serie del último término de (3.3.20); en efecto,

$$(3.3.21) \quad \begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} &= \\ \sum_0^{\infty} r^n e^{inx} + \sum_{-\infty}^{-1} r^{-n} e^{inx} &= \\ \frac{1}{1 - r e^{ix}} + \frac{r e^{-ix}}{1 - r e^{-ix}} &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2}, \end{aligned}$$

que resulta de haber sumado las dos series geométricas de razones $r e^{ix}$ y $r e^{-ix}$, respectivamente, y de un simple cálculo algebraico.

De esta forma (3.3.20) se puede expresar por la siguiente fórmula integral

$$(3.3.22) \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-s) + r^2} f(s) ds, \quad \text{si } 0 \leq r < 1.$$

Al segundo término de la expresión (3.3.22) se le llama *Integral de Poisson* de la función f . Por como se ha calculado la integral de Poisson de f se tiene que satisface la ecuación de Laplace en el interior del disco unidad. Por precisar más la terminología damos la definición siguiente.

3.3.1. Definición.

La función

$$(3.3.23) \quad P(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2} \quad \text{si } 0 \leq r < 1, -\pi \leq \theta \leq \pi,$$

es llamada *núcleo de Poisson*.

Dada una función f integrable en $[-\pi, \pi]$ y 2π -periódica, la integral de Poisson de f es

$$(3.3.24) \quad u(r, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - s) f(s) ds.$$

Para probar (3.3.19) necesitamos el siguiente resultado.

3.3.2. Lema.

Sea $P(r, \theta)$ el núcleo de Poisson definido por (3.3.23). Entonces:

i) Para todo r , P es una función par en θ , es decir,

$$P(r, \theta) = P(r, -\theta).$$

ii) Fijado $r \in [0, 1)$, $P(r, \theta)$ es monótona decreciente en $(0, \pi)$, como consecuencia si $\delta > 0$

$$\max_{\delta \leq \theta \leq \pi} P(r, \theta) = P(r, \delta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos \delta + r^2} \quad \text{y} \quad \min_{\theta \in [0, \pi]} P(r, \theta) = P(r, \pi) > 0.$$

iii) $\int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta) d\theta = 1, \quad 0 \leq r < 1.$

Demostración.

Los apartados i) y ii) resultan de manera inmediata de la expresión (3.3.23), pues $\cos \theta$ es par y decreciente en $[0, \pi]$. La parte iii) se obtiene fácilmente integrando el desarrollo en serie de P . \square

Estas propiedades del núcleo de Poisson junto con el resultado que sigue, el cual prueba (3.3.19), ponen de manifiesto que se trata de un ejemplo de *aproximación de la identidad*, en el sentido que se precisará.

3.3.3. Teorema.

Sea f una función continua y 2π -periódica. Entonces, si se considera la integral de Poisson de f

$$(3.3.25) \quad u(r, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - s) f(s) ds,$$

se verifica que

$$(3.3.26) \quad \lim_{r \rightarrow 1} u(r, \theta) = f(\theta),$$

siendo la convergencia uniforme en $[-\pi, \pi]$.

Demostración.

Por ser f continua en $[-\pi, \pi]$, existe $M = |f(\theta_0)| = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} |f(\theta)|$, para algún $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$ y además es uniformemente continua en $[-\pi, \pi]$. Dado $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $|\theta - \bar{\theta}| < \delta$ se verifica que $|f(\theta) - f(\bar{\theta})| < \varepsilon/2$. Por iii) del lema (3.3.2) aplicado a (3.3.25) se tiene

$$(3.3.27) \quad |u(r, \theta) - f(\theta)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - s) (f(s) - f(\theta)) ds \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - s) |f(s) - f(\theta)| ds,$$

donde en la última desigualdad se ha tenido en cuenta también que $P(r, \theta) > 0$, que es consecuencia obvia de ii) del lema (3.3.2).

Fijado $\varepsilon > 0$, tomamos un $\delta > 0$ correspondiente por la continuidad uniforme de f y descomponemos la última integral de (3.3.27) como sigue

$$(3.3.28) \quad \begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - s) |f(s) - f(\theta)| ds = \\ & \int_{|\theta - s| < \delta} P(r, \theta - s) |f(s) - f(\theta)| ds + \int_{|\theta - s| \geq \delta} P(r, \theta - s) |f(s) - f(\theta)| ds \leq \\ & \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - s) ds + \max_{\delta \leq |\theta - s| \leq \pi} P(r, \theta - s) \int_{-\pi}^{\pi} |f(s) - f(\theta)| ds \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \delta + r^2}, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado ii) y iii) del lema (3.3.2). Por último observar que

$$\lim_{r \rightarrow 1} 2M \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \delta + r^2} = 0,$$

por tanto, existe $1 > r_0 > 0$ tal que si $r_0 < r < 1$ se tiene

$$0 < 2M \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \delta + r^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De esta forma hemos demostrado que

$$|u(r, \theta) - f(\theta)| < \varepsilon, \quad \text{si } r_0 < r < 1, \quad \text{para todo } \theta \in [-\pi, \pi],$$

que es el resultado requerido. \square

El teorema anterior prueba que el problema (3.3.6), o bien el (3.3.1), tiene una solución $u \in C^\infty(B_1) \cap C(\bar{B}_1)$, donde B_1 es la bola unidad abierta y \bar{B}_1 es la bola unidad cerrada. Que la integral de Poisson es la única solución del problema (3.3.1) es un resultado que adelantamos y que probaremos posteriormente con un carácter más general. No obstante, el lector puede ensayar una prueba directa de la unicidad probando que toda solución del problema necesariamente tiene la misma serie de Fourier que la integral de Poisson. (Véase a tal efecto el texto de *R. Seeley "Introducción a las Series e Integrales de Fourier", Ed Reverté 1970*).

Los argumentos que se darán más adelante serán diferentes y se conocerán como *principio del máximo*.

Lo notable es que con la solución del problema de Dirichlet en la bola unidad y con el uso de teoremas de variable compleja vamos a poder dar la solución del problema de Dirichlet en dominios planos muy generales.

Si se tiene una función

$$f : \Omega \subset \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$$

función holomorfa tal que $f'(z) \neq 0$, se dice que se trata de una aplicación conforme.

El siguiente resultado de Riemann es uno de los más profundos de la variable compleja. Establece que todo dominio simplemente conexo (sin agujeros) distinto de todo el plano complejo, es *conformemente equivalente* al disco unidad. Precisamente el teorema de Riemann puede establecerse como sigue.

Teorema de Riemann.

Sea $\Omega \subset \mathbf{C}$ dominio simplemente conexo distinto de todo el plano \mathbf{C} , y sea $z_0 \in \Omega$. Existe una única función analítica

$$f : \Omega \subset \mathbf{C} \longrightarrow B_1,$$

donde B_1 es el disco unidad, verificando $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ y tal que f es una aplicación uno a uno y sobre el disco unidad, $|w| < 1$.

(Véanse los detalles en el libro *L. Ahlfors "Complex Variables" Ed. Mc Graw Hill 1979*).

Dado ahora un dominio $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ simplemente conexo, distinto de todo el plano \mathbf{R}^2 . Consideremos la función $w = f(z)$ dada por el teorema de Riemann, que le transforma en el disco unidad $|w| < 1$, $f(z_0) = 0$. Sean $\bar{x} = (x_1, x_2)$ para $z_0 = x_1 + ix_2$ e $\bar{y} = (y_1, y_2)$ para $z = y_1 + iy_2$.

Considerando la función

$$g(x, y) = g(z_0, z) = -\frac{1}{2\pi} \log |f(z)|$$

se obtiene la *función de Green* del problema, de la cual se obtiene el *núcleo de Poisson* del problema.

Dejamos aplazados todos los detalles al capítulo 5, donde quedarán claros los conceptos de *función de Green* y de *núcleo de Poisson* en este contexto general. Previamente el lector puede consultar el libro *G. Hellwig, "Partial Differential Equations", ed. Blaisdell Pu. Co. New York 1964, página 35.*

CONVERGENCIA DE SERIES DE FOURIER

Hay muchas razones para acometer el estudio de las series de Fourier; desde razones históricas, hasta la búsqueda de las aplicaciones. En este sentido ya tenemos la experiencia del problema de Dirichlet en el disco unidad, que acabamos de resolver.

En las próximas secciones necesitaremos conocer más resultados sobre convergencia de series de Fourier, por lo que dedicamos a este tema el resto del presente apartado.

Consideramos el sistema

$$\mathcal{T} \equiv \left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n \in \mathbf{Z}}.$$

\mathcal{T} es ortonormal respecto al producto escalar definido por (3.1.25) en $L^2([-\pi, \pi])$, por ser el sistema de autofunciones del problema de autovalores periódico

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y \\ y(-\pi) = y(\pi) \\ y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases}$$

(El lector puede comprobar ésta afirmación por integración elemental.)

Para una función integrable definimos los correspondientes coeficientes de Fourier por

$$(3.3.29) \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds.$$

Como consecuencia inmediata de la observación anterior y de lo estudiado en la sección 3.2 sobre desarrollo en serie de autofunciones tenemos:

(I) Si $f \in L^2(-\pi, \pi)$ entonces

$$(3.3.30) \quad \|f\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2. \quad (\text{Identidad de Parseval.})$$

Como consecuencia si $S_N f(x) = \sum_{-N}^N a_n e^{inx}$,

$$(3.3.31) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N f\|_2 = 0.$$

(II) Si $f \in \mathcal{C}^2$ es 2π -periódica, entonces

$$(3.3.32) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = f(x),$$

siendo la convergencia uniforme, por el teorema (3.2.12).

Estos resultados derivan de la teoría general que hemos desarrollado.

Pero en este caso de las series de Fourier podemos evaluar $S_N f$ de una manera similar a lo hecho con el núcleo de Poisson. En efecto,

$$(3.3.33) \quad \begin{aligned} S_N f(x) &= \sum_{-N}^N a_n e^{inx} = \sum_{-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \right) e^{inx} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left(\sum_{-N}^N e^{in(x-s)} \right) ds, \end{aligned}$$

donde la suma del último término se calcula de la forma siguiente,

$$(3.3.34) \quad \begin{aligned} \tilde{D}_N(t) &= \sum_{-N}^N e^{int} = \\ &= e^{-iNt} \sum_{n=0}^{2N} e^{int} = e^{-iNt} \frac{e^{i(2N+1)t} - 1}{e^{it} - 1}, \end{aligned}$$

como suma de los $2N$ primeros términos de una progresión geométrica de razón e^{it} . Pero de (3.3.34) se deduce que

$$(3.3.35) \quad e^{-i\frac{t}{2}}(e^{it} - 1)\tilde{D}_N(t) = e^{-i\frac{t}{2}}(e^{i(N+1)t} - e^{-iNt}),$$

de donde resulta

$$(3.3.36) \quad \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\tilde{D}_N(t) = \operatorname{sen}\left(N + \frac{1}{2}\right)t,$$

es decir,

$$(3.3.37) \quad \tilde{D}_N(t) = \frac{\operatorname{sen}\left(N + \frac{1}{2}\right)t}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Llamaremos *núcleo de Dirichlet* a

$$(3.3.38) \quad D_N(t) = \frac{1}{2\pi} \tilde{D}_N(t)$$

Entonces es obvio que se tiene

$$(3.3.39) \quad S_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_N(x-s) ds.$$

La fórmula (3.3.39) se lee diciendo que la suma parcial N -ésima de la serie de Fourier de f , es la *integral de convolución* de f con el núcleo de Dirichlet.

Con esta expresión trabajaremos de ahora en adelante para obtener algunos resultados de convergencia de series de Fourier más generales y precisos.

Las ideas de Dirichlet, matemático alemán sucesor de Gauss en Gottingen, se demuestran muy fructíferas en este área de las series de Fourier. Su contribución abarca también otras disciplinas como las Ecuaciones en Derivadas Parciales, el Cálculo de Variaciones y la Teoría de Números.

Antes de seguir observemos que si $f \in L^2([-\pi, \pi])$, (3.3.30) implica, en particular que

$$(3.3.40) \quad \lim_{|n| \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$$

Supongamos ahora que $f \in \mathcal{C}^1$ y es 2π -periódica. (Obsérvese que esto puede interpretarse como que $f(e^{it})$ es derivable en la circunferencia unidad.)

Podemos calcular los coeficientes de Fourier de f' ,

$$(3.3.41) \quad a'_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(s) e^{-ins} ds,$$

que de acuerdo con (3.3.40) verifican

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} |a'_n| = 0$$

y en particular existe M , $0 < M < \infty$, verificando

$$(3.3.42) \quad |a'_n| \leq M,$$

cualquiera que sea $n \in \mathbf{Z}$.

Pero integrando por partes en (3.3.41) y teniendo en cuenta la periodicidad de f , podemos relacionar los coeficientes de Fourier de f con los de f' , es decir,

$$(3.3.43) \quad a'_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(s) e^{-ins} ds = \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds = in a_n,$$

siendo a_n el coeficiente de Fourier para f . Podemos resumir (3.3.42) y (3.3.43) en el resultado siguiente.

3.3.4. Teorema.

Si $f \in C^1$ es 2π -periódica y

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds,$$

entonces $a'_n = ina_n$, y por tanto, existe $M < \infty$ tal que

$$|a_n| \leq \frac{M}{|n|}, \quad \text{para cualquier } n \in \mathbf{Z}$$

Un argumento de recurrencia permite formular la siguiente extensión del resultado anterior.

3.3.5. Corolario.

Si $k \in \mathbf{N}$, $k > 1$ y suponemos $f \in C^k$ y 2π -periódica, entonces se verifica

$$|a_n| \leq \frac{M}{|n|^k}, \quad \text{cualquiera que sea } n \in \mathbf{Z}.$$

Podemos decir entonces que *la mayor regularidad de la función se traduce en un mayor decaimiento de sus coeficientes de Fourier*. Vamos a obtener una aplicación inmediata de este hecho a la obtención de un teorema de convergencia uniforme.

3.3.6. Teorema.

Sea $f \in C^1$ y 2π -periódica y sea $S_N f(x)$ su suma parcial de Fourier N -ésima, como se definió en (3.3.33). Entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = f(x)$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

Demostración.

Por (3.3.43) y suponiendo $N > n$

$$(3.3.44) \quad |S_N f(x) - S_n f(x)| \leq \sum_{n < k \leq N} |a_k| \leq \sum_{n < k \leq N} \left| \frac{a'_k}{k} \right|,$$

siendo a'_k el coeficiente de Fourier k -ésimo de f' . Pero entonces tenemos la siguiente desigualdad inmediata

$$(3.3.45) \quad \sum_{n < k \leq N} \left| \frac{a'_k}{k} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{n < k \leq N} (|a'_k|^2 + \frac{1}{k^2}) \leq \varepsilon, \quad \text{si } n, M \geq n_0,$$

pues la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{k^2} \leq A < \infty$ y por la identidad de Parseval $\sum_{k \in \mathbf{Z}} |a'_k|^2 = \|f'\|_2^2$.

Por tanto, $\{S_N f(x)\}_{n \in \mathbf{N}}$ es uniformemente de Cauchy en $[-\pi, \pi]$. Entonces existe $\phi \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ tal que

$$(3.3.46) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = \phi(x),$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$. Pero en virtud de (3.3.46), ϕ tiene los mismos coeficientes de Fourier que f y entonces

$$(3.3.47) \quad \|f - \phi\|_2 \leq \|f - S_N f\|_2 + \|S_N f - \phi\|_2 \rightarrow 0 \quad N \rightarrow \infty,$$

en virtud de (3.3.31). Por tanto, $f \equiv \phi$ y queda demostrado el teorema. \square

Observamos que en el teorema (3.3.6) el resultado sólo depende de tener la derivada en L^2 , con lo cual basta suponer que exista salvo en un conjunto de puntos de medida cero. Dicho de una manera alternativa, el resultado anterior es cierto si se supone que f es la primitiva de una función de L^2 . Esta observación se recoge en el siguiente enunciado.

3.3.6'. Teorema.

Sea f 2π -periódica y tal que $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(s) ds$, con $f' \in L^2([-\pi, \pi])$. Sea $S_N f(x)$ su suma parcial de Fourier N -ésima, como se definió en (3.3.33). Entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = f(x)$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

Ejemplo.

El teorema (3.3.6') recoge como casos particulares importantes el de las funciones continuas que son además derivables a trozos. Una función en dientes de sierra y 2π -periódica es el prototipo de tales funciones.

La representación obtenida en (3.3.39) para las sumas parciales de la serie de Fourier va a permitirnos un estudio *localizado* de la convergencia, como vamos a precisar. La localización debe entenderse en el sentido que *la convergencia de la serie de Fourier en un punto depende solo de la regularidad de la función en un entorno de dicho punto*.

Podemos expresar (3.3.40) en la forma que se utilizará a continuación.

3.3.7. Lema. (Riemann-Lebesgue)

Sea $f \in L^2([-\pi, \pi])$, entonces

$$(3.3.48a) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \operatorname{sen} k s ds = 0$$

y

$$(3.3.48b) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos ksd s = 0.$$

Demostración.

Basta observar que $\operatorname{sen} ks = \frac{1}{2i}(e^{iks} - e^{-iks})$ para comprobar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(s) \operatorname{sen} ksd s = \frac{-\pi}{i}(a_k - a_{-k}),$$

con lo que se sigue (3.3.48a) de (3.3.40). El resultado (3.3.48b) es similar. \square

Nota.

Teniendo en cuenta que el espacio $L^2([-\pi, \pi])$ es denso en el espacio de funciones integrables, se concluye el lema de Riemann-Lebesgue (3.3.7) para L^1 , que es como habitualmente se enuncia.

Damos otra prueba del anterior resultado. Si $f \in \mathcal{C}^1$ es 2π -periódica integrando por partes se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(s) \operatorname{sen} ksd s = \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} f'(s) \cos ksd s,$$

con lo que se sigue como antes de (3.3.40). De nuevo la conclusión para funciones integrables, se sigue por un argumento de densidad. En efecto, como \mathcal{C}^1 es denso en L^1 , fija una función $g \in L^1$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $f \in \mathcal{C}^1$ tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - f(x)| dx \leq \varepsilon$$

por tanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(s) \operatorname{sen} ksd s = \int_{-\pi}^{\pi} (g(s) - f(s)) \operatorname{sen} ksd s + \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \operatorname{sen} ksd s.$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$

$$\left| \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(s) \operatorname{sen} ksd s \right| \leq \varepsilon,$$

que es lo que queríamos demostrar.

El siguiente paso es observar dos propiedades elementales del núcleo de Dirichlet.

- 1) Integrando término a término en la suma trigonométrica que define a $D_N(t)$ se obtiene

$$(3.3.49) \quad \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1, \quad \text{para todo } N \in \mathbf{N}$$

- 2) El núcleo de Dirichlet es una función par,

$$(3.3.50) \quad D_N(t) = D_N(-t),$$

cualquiera que sea $N \in \mathbf{N}$, por tratarse de un cociente de senos.

Con estos prerequisites podemos formular el siguiente resultado, debido a Dirichlet, que confirma la idea de localización que habíamos conjeturado.

Una precisión de la terminología que vamos a usar:

Una función se dice que es derivable a trozos si:

- i) *Es continua salvo, a lo más, en una cantidad finita de puntos, en los cuales tiene límites laterales finitos.*
- ii) *Tiene derivada continua en todos los puntos de continuidad de la función salvo, a lo más, en una cantidad finita, y en todo punto la derivada tiene límites laterales finitos.*

3.3.8. Teorema.

Sea $f \in L^2$, 2π -periódica, tal que en un entorno de x_0 , $I_{\delta_0} = (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$, f es derivable a trozos. Entonces

$$(3.3.51) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0, +) + f(x_0, -)].$$

Demostración.

Por las propiedades del núcleo de Dirichlet, (3.3.49) y (3.3.50) podemos hacer el cálculo siguiente

$$(3.3.52) \quad \begin{aligned} S_N f(x_0) - \frac{1}{2} [f(x_0, +) + f(x_0, -)] &= \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) [f(x_0 + t) - \frac{1}{2} f(x_0, +) - \frac{1}{2} f(x_0, -)] dt = \\ &= \int_0^{\pi} D_N(t) (f(x_0 + t) - f(x_0, +)) dt + \int_0^{\pi} D_N(t) (f(x_0 - t) - f(x_0, -)) dt \equiv \\ &\equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Es claro que el comportamiento de los dos sumandos I_1 e I_2 es idéntico por lo que realizamos el estudio de I_1 y dejamos al cuidado del lector persuadirse que a I_2 se le estima de igual forma.

Por la hipótesis de regularidad, f es derivable a trozos, por lo que existe $\delta_1 < \delta_0$ tal que $\sup_{x_0 < s < x_0 + \delta_1} |f'(s)| \leq M$, para cierta constante M , lo cual implica que

$$|f(x_0 + t) - f(x_0, +)| \leq M|t| \quad \text{si} \quad |t| < \delta_1.$$

Entonces

(3.3.53)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi D_N(t)(f(x_0 + t) - f(x_0, +))dt = \\ &= \int_0^\delta D_N(t)(f(x_0 + t) - f(x_0, +))dt + \int_\delta^\pi D_N(t)(f(x_0 + t) - f(x_0, +))dt \equiv \\ &\equiv I_1(\delta, N) + I_2(\delta, N). \end{aligned}$$

Para $\delta < \delta_1$ se tiene

$$(3.3.54) \quad |I_1(\delta, N)| \leq \int_0^\delta M|D_N(t)|dt \leq \frac{M}{\pi} \int_0^\delta \frac{t}{2 \operatorname{sen}(\frac{t}{2})} dt.$$

Observando que si $t \in [0, \pi]$, $t \leq 2\pi \operatorname{sen}(\frac{t}{2})$, se tiene que

$$|I_1(\delta, N)| \leq M\delta.$$

Así, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta \leq \min\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2M}\}$, resulta

$$(3.3.55.) \quad |I_1(\delta, N)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fijado $\delta > 0$ para obtener (3.3.55), $I_2(\delta, N)$ se estima por el lema (3.3.7), pues

$$I_2(\delta, N) = \int_{-\pi}^\pi g(t) \operatorname{sen}((N + \frac{1}{2})t)dt,$$

donde

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0, +)}{2\pi \operatorname{sen}(\frac{t}{2})} & \text{si} \quad \delta < t < \pi \\ 0 & \text{si} \quad -\pi < t < \delta. \end{cases}$$

Es claro que $g \in L^2([-\pi, \pi])$. Entonces

$$\begin{aligned} I_2(\delta, N) &= \int_{-\pi}^\pi g(t) \operatorname{sen}((N + \frac{1}{2})t)dt = \\ &= \int_{-\pi}^\pi g(t) \operatorname{sen}(Nt) \cos(\frac{t}{2})dt + \int_{-\pi}^\pi g(t) \cos(Nt) \operatorname{sen}(\frac{t}{2})dt. \end{aligned}$$

En virtud de (3.3.48a) y (3.3.48b), existe N_0 tal que si $N > N_0$

$$(3.3.56) \quad |I_2(\delta, N)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Las desigualdades (3.3.55) y (3.3.56) demuestran el teorema. \square

En la demostración anterior, queda clara la idea de *localización*. Como el núcleo de Dirichlet no es positivo, no podemos introducir el valor absoluto dentro de la integral definiendo las sumas parciales puesto que entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| dt \approx \log N \quad N \rightarrow \infty.$$

El lema de Riemann-Lebesgue establece que lo que ocurre fuera de un entorno del punto que se estudia no aporta nada en el límite.

La parte sustancial es que la regularidad de la función en un entorno del punto es suficiente para probar la convergencia.

Un resultado como el anterior con sólo la hipótesis de continuidad es falso, como pone de manifiesto un contraejemplo del matemático germano Paul Du Bois-Reymond, publicado a fines del Siglo XIX. Du Bois-Reymond encuentra una función continua cuya serie de Fourier diverge en un subconjunto denso del intervalo $[-\pi, \pi]$. Dicho categóricamente, para asegurar la convergencia de la serie de Fourier en un punto, se necesita *algo más* de regularidad en un entorno que la mera continuidad. El teorema de Dirichlet establece que la derivabilidad es suficiente y hay otros resultados que dan como condición suficiente otras condiciones de regularidad más débiles. Pero lo cierto es que las funciones continuas quedan fuera de este tipo de resultados. Sin embargo, si se cambia el *modo de sumar* un teorema debido al matemático húngaro Leopold Féjer pone de manifiesto que se obtiene aproximación uniforme para las funciones continuas. Este resultado, que tiene interés en sí mismo, nos dará como consecuencia un teorema de densidad importante: el teorema de Weierstrass. El resultado de Féjer puede formularse como sigue.

3.3.9. Teorema.

Sea f continua y 2π -periódica; consideremos las medias aritméticas de sumas parciales de Fourier de f ,

$$(3.3.56) \quad \sigma_{N+1}f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_0^N S_k f(x),$$

entonces $\sigma_{N+1}f(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente cuando $N \rightarrow \infty$.

Para demostrar este resultado procedemos a expresar $\sigma_{N+1}f(x)$ de forma integral.

Utilizando (3.3.39) se tiene

$$(3.3.57) \quad \begin{aligned} \sigma_{N+1}f(x) &= \frac{1}{N+1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_0^N D_k(x-t) \right) f(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi(N+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_0^N \operatorname{sen} \left(\frac{(2k+1)(x-t)}{2} \right) \right) \frac{f(t)}{\operatorname{sen} \left(\frac{x-t}{2} \right)} dt. \end{aligned}$$

Si se observa que

$$(3.3.58) \quad 2 \operatorname{sen}(2k+1)s \operatorname{sen} s = \cos 2ks - \cos 2(k+1)s,$$

se tiene

$$(3.3.59) \quad \sum_0^N \operatorname{sen}(2k+1)s = \frac{1 - \cos 2(N+1)s}{2 \operatorname{sen} s} = \frac{\operatorname{sen}^2(N+1)s}{\operatorname{sen} s},$$

por lo que sustituyendo (3.3.59) en (3.3.57) resulta

$$(3.3.60) \quad \sigma_{N+1}f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \Phi_{N+1}(t) dt,$$

siendo

$$(3.3.61) \quad \Phi_{N+1}(t) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \frac{\operatorname{sen}^2(N+1)\left(\frac{t}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)},$$

que es el llamado núcleo de Féjer de orden N .

Las propiedades fundamentales del núcleo de Féjer son las siguientes

- 1) $\Phi_{N+1}(t) \geq 0$ y $\Phi_{N+1}(t) = \Phi_{N+1}(-t)$.
- 2) $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{N+1}(t) dt = 1$ para todo $N \in \mathbf{N}$.
- 3) Para cada $\delta \in (0, \pi)$ fijo,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\pi} \Phi_{N+1}(t) dt = 0,$$

para todo $N \in \mathbf{N}$.

El resultado 1) es evidente; 2) resulta de integrar directamente en la igualdad

$$\Phi_{N+1}(t) = \frac{1}{N+1} \sum_0^N D_k(t).$$

Para establecer 3), obsérvese que si $0 < \delta < t < \pi$ entonces

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)} < \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta}{2}\right)},$$

y entonces es consecuencia del lema de Riemann-Lebesgue (3.3.7).

Una observación importante es que el núcleo de Féjer satisface idénticas propiedades que el núcleo de Poisson. Ambos son *aproximaciones de la identidad* en el sentido que verifican 1), 2) y 3). Las propiedades 2) y 3) podemos entenderlas como que la masa se concentra en un entorno de $t = 0$ a medida que crece N . Este mismo fenómeno ocurre cuando en el núcleo de Poisson hacemos tender r a 1. El nombre de *aproximación de la identidad* se justifica pues al calcular lo que hemos llamado *integral de convolución* y pasar al límite, obtenemos la función de partida.

Como consecuencia se verifica también el resultado de Féjer enunciado como teorema (3.3.9).

Demostración del teorema (3.3.9).

Sea $M = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|$. Por ser f uniformemente continua en $[-\pi, \pi]$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Utilizando la propiedad 2) del núcleo de Féjer podemos escribir

$$\begin{aligned} |\sigma_N f(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(t)(f(x-t) - f(x))dt \right| \leq \\ (3.3.62) \quad & \left| \int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_N(t)(f(x-t) - f(x))dt \right| + \\ & + \left| \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_N(t)(f(x-t) - f(x))dt \right| + \left| \int_{\delta}^{\pi} \Phi_N(t)(f(x-t) - f(x))dt \right| \equiv \\ & \equiv I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Estimamos en primer lugar I_2 ,

$$I_2 \leq \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_N(t) |f(x-t) - f(x)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(t) dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Observamos que I_1 e I_3 se comportan de manera análoga. Estimamos I_3 ,

$$I_3 \leq \int_{\delta}^{\pi} \Phi_N(t) |f(x-t) - f(x)| dt \leq 2M \int_{\delta}^{\pi} \Phi_N(t) dt,$$

la demostración concluye teniendo en cuenta la propiedad 3) del núcleo de Féjer. \square

Como consecuencia del teorema de Féjer obtenemos dos resultados importantes. El primero de ellos es el siguiente teorema de densidad de Weierstrass.

3.3.10. Teorema. (Weierstrass)

Toda función continua en $[-1, 1]$ se puede aproximar por polinomios.

Demostración.

Dada una función $f \in \mathcal{C}([-1, 1])$ la extendemos como función continua a \tilde{f} definida en $[-\pi, \pi]$ de forma que $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$. Por periodicidad se extiende como función continua a todo \mathbf{R} . El teorema de Féjer permite aproximar \tilde{f} uniformemente por polinomios trigonométricos en $[-\pi, \pi]$. Pero los polinomios trigonométricos son funciones enteras, por tanto, son aproximables uniformemente por polinomios. La conclusión es ahora inmediata. \square

El lector se escargará de sustituir el intervalo $[-1, 1]$ por otro cualquiera que sea cerrado y acotado.

El resultado anterior se puede enunciar de manera equivalente diciendo que

Los polinomios son densos en el espacio de las funciones continuas en un compacto, dotado con la topología de la convergencia uniforme.

El segundo resultado consecuencia del teorema de Féjer es el siguiente teorema de unicidad.

3.3.11. Teorema.

Los coeficientes de Fourier de una función continua la determinan unívocamente.

En efecto, si una función tiene coeficientes de Fourier cero, sus sumas de Féjer convergen uniformemente a cero.

Observaciones útiles para el cálculo.

Cuando se trata de funciones reales se consideran las Series de Fourier de senos y cosenos,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_0^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx),$$

siendo los coeficientes de Fourier ahora

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos ksd s, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \operatorname{sen} ksd s, \quad k = 1, 2, \dots$$

Todos los resultados obtenidos son obviamente válidos.

Como consecuencia práctica se tiene que:

- 1) *Las funciones pares tienen cero los coeficientes correspondientes a los senos.*
- 2) *Las funciones impares tienen cero los coeficientes correspondientes a los cosenos.*

Una aplicación.

Aplicaremos lo estudiado sobre series de Fourier al análisis de una propiedad *extremal* de la solución del problema de Dirichlet (3.3.1). Tal propiedad caracteriza a la solución y sirve para probar existencia de solución en dominios más generales.

Supondremos que en el problema (3.3.1) se tiene el dato $f \in \mathcal{C}^1$; entonces podemos definir la siguiente *integral de Dirichlet o integral de energía*

$$(3.3.63) \quad D_R(u) = \frac{1}{2} \iint_{B_R} (u_x^2 + u_y^2) dx dy,$$

donde B_R representa la bola de centro el origen y radio R . Podemos expresar la energía en coordenadas polares de manera equivalente por

$$(3.3.64) \quad D_R(u) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R (u_r^2 + \frac{1}{r^2} u_\theta^2) r dr d\theta.$$

La solución de (3.3.6) viene dada por (3.3.20) y entonces se tiene

$$(3.3.65) \quad \begin{cases} u_r = \sum_{n \neq 0} |n| r^{|n|-1} e^{in\theta} a_n \\ u_\theta = \sum_{-\infty}^{\infty} (in) r^{|n|} e^{in\theta} a_n, \end{cases}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds.$$

La identidad de Parseval implica que

$$(3.3.66) \quad \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (u_r^2 + \frac{1}{r^2} u_\theta^2) d\theta = \sum_{-\infty}^{\infty} n^2 r^{2|n|-2} |a_n|^2,$$

por lo que

$$D_R(u) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} n R^{2|n|} |a_n|^2 \rightarrow D_1(u) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} n |a_n|^2, \quad \text{cuando } R \rightarrow 1.$$

En la hipótesis de que $f \in \mathcal{C}^1$ se tiene que

$$(3.3.67) \quad D_1(u) < \infty,$$

ya que si

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta},$$

entonces

$$f'(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} i n a_n e^{in\theta},$$

así

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(\theta)|^2 d\theta = \sum_{-\infty}^{\infty} n^2 |a_n|^2 < \infty,$$

y en particular resulta (3.3.67).

Observamos que si se supone sólo la continuidad del dato no se concluye (3.3.67) como pone de manifiesto el siguiente ejemplo de Hadamard. Considérese la función

$$f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(n!x),$$

evidentemente f es continua, pero la correspondiente integral de Poisson (solución de (3.3.1)) no verifica (3.3.67).

Podemos formular ya la anunciada propiedad extremal del problema (3.3.6) cuando $f \in C^1$. Consideremos la clase de funciones admisibles

$$\mathcal{A} = \{g \in C^1([0, 1] \times [0, 2\pi]) \mid g(r, \theta) = g(r, \theta + 2\pi), g(1, \theta) = f(\theta)\}$$

Propiedad extremal de la solución de (3.3.6):

La solución del problema de Dirichlet hace mínima la energía (3.3.63) sobre la clase de funciones admisibles \mathcal{A} .

Más precisamente se tiene el siguiente resultado.

3.3.12. Teorema.

Si u es solución del problema (3.3.6), entonces

$$(3.3.68) \quad D_1(u) \leq D_1(g), \quad \text{cualquiera que sea } g \in \mathcal{A}.$$

Demostración.

La prueba es un cálculo que vamos a efectuar en detalle. Evidentemente basta probar que

$$(3.3.69) \quad D_1(u_N) \leq D_1(g), \quad N \in \mathbf{N},$$

siendo

$$u_N(r, \theta) = \sum_{-N}^N a_k r^{|k|} e^{ik\theta}.$$

Según sabemos, u_N verifica la ecuación de Laplace, por tanto aplicando el teorema de la divergencia de Gauss (1.2.3),

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{B_1} (g - u_N) \Delta u_N dx dy = \\ &= \iint_{B_1} \operatorname{div} ((g - u_N) \nabla u_N) dx dy - \iint_{B_1} \langle \nabla (g - u_N), \nabla u_N \rangle dx dy = \\ &= \int_{x^2+y^2=1} (g - u_N) \langle \nabla u_N, \nu \rangle dS - \iint_{B_1} \langle \nabla (g - u_N), \nabla u_N \rangle dx dy, \end{aligned}$$

siendo ν la normal exterior al disco unidad y dS el elemento de arco en la circunferencia unidad. Admitamos que

$$(3.3.70) \quad \int_{x^2+y^2=1} (g - u_N) \langle \nabla u_N, \nu \rangle dS = 0,$$

entonces se tiene probado (3.3.69) pues

$$\begin{aligned} 2D_1(g) &= \iint_{B_1} |\nabla g|^2 dx dy = \iint_{B_1} |\nabla (g - u_N) + \nabla u_N|^2 dx dy = \\ &= 2D_1(u_N) + 2D_1(g - u_N) + 2 \iint_{B_1} \langle \nabla (g - u_N), \nabla u_N \rangle dx dy = \\ &= 2D_1(u_N) + 2D_1(g - u_N) \geq 2D_1(u_N), \end{aligned}$$

por la hipótesis suplementaria (3.3.70) y puesto que $D_1(g - u_N) \geq 0$.

Para acabar probamos (3.3.70). Dado que $g(1, \theta) = f(\theta)$,

$$g(1, \theta) - u_N(1, \theta) = \sum_{|k| \geq N+1} a_k e^{ik\theta}.$$

De otra parte se tiene

$$(u_N)_\nu(1, \theta) = (u_N)_\rho(1, \theta) = \sum_{|k| \leq N} |k| a_k e^{ik\theta},$$

entonces concluimos por ortogonalidad que

$$\begin{aligned} &\iint_{x^2+y^2=1} (g - u_N) \langle \nabla u_N, \nu \rangle dS = \\ &= \int_0^{2\pi} (g(1, \theta) - u_N(1, \theta)) (u_N)_\rho(1, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{|k| \geq N+1} a_k e^{ik\theta} \right) \left(\sum_{|k| \leq N} |k| a_k e^{ik\theta} \right) d\theta = 0, \quad \square \end{aligned}$$

3.4.- Problemas mixtos para la ecuación del calor en una dimensión espacial.

Vamos a aplicar los resultados de las secciones precedentes al estudio de problemas de conducción de calor en una dimensión espacial.

Concretamente, vamos a considerar el problema

$$(3.4.1) \quad \begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = F(x, t) & \text{si } (x, t) \in (0, l) \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & , x \in (0, l) \\ Au(0, t) + Bu_x(0, t) = 0, & t \in (0, \infty) \\ Au(l, t) + Bu_x(l, t) = 0, & t \in (0, \infty) \quad A, B \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Si $B = 0$, (3.4.1) es el problema planteado en la introducción y si $A = 0$ representa la conducción del calor en el segmento $(0, l)$ en condiciones de aislamiento.

El lector se puede proponer condiciones de Sturm más generales, es decir,

$$\begin{cases} Au(0, t) + Bu_x(0, t) = 0 \\ Cu(l, t) + Du_x(l, t) = 0 \quad A, B, C, D \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

y también las condiciones periódicas. El método será idéntico al que consideramos para (3.4.1), variando únicamente el cálculo algebraico previo.

Haremos el estudio en partes para que los cálculos sean más transparentes. La linealidad del problema permite obtener la solución final como suma de las soluciones de los problemas parciales de cada parte.

1.- Problema homogéneo.

Consideramos el problema homogéneo, es decir, $F(x, t) \equiv 0$. Resulta

$$(PH) \quad \begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 & \text{si } (x, t) \in (0, l) \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, l] \\ Au(0, t) + Bu_x(0, t) = 0, & t \in (0, \infty) \\ Au(l, t) + Bu_x(l, t) = 0, & t \in (0, \infty) \quad A, B \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Buscando soluciones de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$, se obtienen las ecuaciones

$$(3.4.2) \quad \begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0. \end{cases}$$

De igual forma a lo hecho en la introducción del capítulo, el problema de contorno resultante es

$$(3.4.3) \quad \begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ AX(0) + BX'(0) = 0 \\ AX(l) + BX'(l) = 0. \end{cases}$$

Como la solución general de la ecuación en (3.4.3) es

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x},$$

para que haya solución no trivial del problema, el sistema lineal

$$(3.4.4) \quad \begin{pmatrix} A + B\sqrt{\lambda} & A - B\sqrt{\lambda} \\ e^{\sqrt{\lambda}l}(A + B\sqrt{\lambda}) & e^{-\sqrt{\lambda}l}(A - B\sqrt{\lambda}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ha de tener solución distinta de la solución cero, para lo cual se ha de verificar

$$(3.4.5) \quad (A^2 - B^2\lambda)(e^{-\sqrt{\lambda}l} - e^{\sqrt{\lambda}l}) = 0.$$

Así, o bien $\lambda_0 = \frac{A^2}{B^2}$ (si $B \neq 0$), o bien

$$(3.4.6) \quad e^{-\sqrt{\lambda}l} - e^{\sqrt{\lambda}l} = 0.$$

Por tanto, se tiene

- (1) Si $B = 0$, es decir con condiciones de tipo Dirichlet, resulta que la sucesión de autovalores es

$$(3.4.7) \quad \lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{l^2}, \quad k \in \mathbf{N},$$

siendo las autofunciones correspondientes

$$(3.4.8) \quad \phi_k(x) = c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right).$$

- (2) Si $B \neq 0$ se tienen los autovalores

$$(3.4.7') \quad \lambda_0 = \frac{A^2}{B^2}, \quad \lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{l^2}, \quad k \in \mathbf{N},$$

siendo las autofunciones

$$(3.4.8') \quad \begin{aligned} \phi_0(x) &= c_2 e^{-\frac{A}{B}x}, \\ \phi_k(x) &= c_1 \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad k \in \mathbf{N}, \\ \text{donde } &(A + B\frac{k\pi}{l})c_1 + (A - B\frac{k\pi}{l})c_2 = 0. \end{aligned}$$

Ejemplos.

1) Si $B = 0$ entonces las autofunciones son

$$\phi_k(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right).$$

2) Si $A = 0$ entonces las autofunciones son

$$\phi_0(x) = 1, \quad \phi_k(x) = \operatorname{cos}\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad k \in \mathbf{N}.$$

A partir de aquí consideraremos las autofunciones ϕ_k normalizadas, es decir, de forma que $\|\phi_k\|_2 = 1$. Obsérvese que esto se consigue tomando una cualquiera y dividiendo por su norma.

La correspondiente ecuación en la variables t es

$$T_n'(t) = \lambda_n T_n(t), \quad \text{cuyas soluciones son } T_n(t) = A_n e^{-(\frac{k\pi}{l})^2 t}.$$

Por tanto, la solución de (3.4.1) se conjetura que es de la forma

$$(3.4.9) \quad u(x, t) = \sum_0^{\infty} a_k \phi_k(x) e^{-(\frac{k\pi}{l})^2 t},$$

donde

$$a_k = \int_0^l u_0(s) \phi_k(s) ds.$$

Evidentemente si la serie (3.4.9) define una función, ésta verifica los datos de contorno y el dato inicial.

Si suponemos que $u_0 \in \mathcal{C}^2([0, l])$ y verifica los datos de contorno, la serie de Fourier de u_0 converge uniformemente en $[0, l]$. Además, utilizando la identidad de Green del corolario (3.2.2) se tiene

$$a_k'' = \langle u'', \phi_k \rangle = \langle u, \phi_k'' \rangle = \lambda_k \langle u, \phi_k \rangle = \lambda_k a_k,$$

es decir, los coeficientes de Fourier de u se pueden estimar por

$$|a_k| \leq \frac{M}{|\lambda_k|},$$

pues u'' es continua y por la desigualdad de Bessel se tiene que sus coeficientes de Fourier verifican

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k''| = 0.$$

Por tanto, por el criterio de Weierstrass, también converge uniformemente la serie (3.4.9).

Si se deriva término a término una vez respecto a t o dos veces respecto a x se obtiene

$$(3.4.10) \quad \sum_0^{\infty} -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 a_k \phi_k(x) e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t},$$

tomando $t_0 > 0$ la serie (3.4.10) tiene la mayorante

$$\sum_0^{\infty} -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 a_k \phi_k(x) e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t_0}, \quad \text{si } t \geq t_0.$$

Como consecuencia de que la serie (3.4.9) converge uniformemente en $[0, l] \times [0, \infty)$ y la serie (3.4.10) converge uniformemente en $[0, l] \times [t_0, \infty)$, se tiene:

- 1) u_t y u_{xx} están definidas por la serie (3.4.10), verificandose la ecuación $u_t = u_{xx}$ en $(0, l) \times (0, \infty)$.
- 2) $u_t, u_{xx} \in \mathcal{C}([0, l] \times (0, \infty))$.
- 3) Razonando por recurrencia se tiene que $u \in \mathcal{C}^\infty((0, l) \times (0, \infty))$.
- 4) Se verifica la condición inicial, en el sentido que

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = u_0(x), \quad \text{uniformemente en } [0, l].$$

Es decir, $u \in \mathcal{C}([0, l] \times [0, \infty))$

Obsérvese que si suponemos sólomente que $u_0 \in L^2([0, l])$ se tienen las conclusiones 1), 2) y 3) pues los argumentos anteriores reposan en el hecho que los coeficientes de Fourier $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ forman una sucesión acotada.

Evidentemente no se puede esperar un resultado como 4). No obstante veremos que el dato inicial se satisface en un sentido más débil. Probaremos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^l |u(x, t) - u_0(x)|^2 dx = 0$$

En efecto, por la identidad de Parseval

$$\int_0^l |u(x, t) - u_0(x)|^2 dx = \sum_0^{\infty} |a_k|^2 |1 - e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t}|^2,$$

por igual razón, para todo $N \in \mathbf{N}$

$$(3.4.11) \quad \int_0^l |S_N u(x, t) - S_N u_0(x)|^2 dx = \sum_0^N |a_k|^2 |1 - e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t}|^2.$$

Hemos de ver que podemos permutar la suma de la serie con el paso al límite cuando t tiende a cero. Tomando,

$$S_N u(x, t) = \sum_0^N a_k \phi_k(x) e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t},$$

$$S_N u_0(x) = \sum_0^N a_k \phi_k(x),$$

resulta que dado $\varepsilon > 0$ existe N_0 tal que si $N > N_0$,

$$\int_0^l |u(x, t) - S_N u(x, t)|^2 dx = \sum_N^\infty |a_k|^2 e^{-2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t} \leq \sum_N^\infty |a_k|^2 < \varepsilon, \quad \text{para todo } t > 0$$

y también,

$$\int_0^l |u_0(x) - S_N u(x)|^2 dx = \sum_M^N |a_k|^2 \leq \sum_N^\infty |a_k|^2 < \varepsilon,$$

entonces, usando la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^l |u(x, t) - u_0(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \left(\int_0^l |u(x, t) - S_N u(x, t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^l |S_N u(x, t) - S_N u_0(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + \left(\int_0^l |u_0(x) - S_N u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq 2 \left(\sum_N^\infty |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_0^N |a_k|^2 \left| 1 - e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

y ahora pasando al límite para $t \rightarrow 0$ tenemos para cada $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^l |u(x, t) - u_0(x)|^2 dx \leq 2\sqrt{\varepsilon},$$

como se quería probar.

En resumen, hemos demostrado el resultado siguiente

3.4.1. Teorema.

Sea u la función definida en (3.4.9), donde los coeficientes son los coeficientes de Fourier de u_0 respecto a la familia de autofunciones (3.4.8).

1) Si $u_0 \in C^2([0, l])$ y verifica los datos de contorno, entonces

$$u \in C^\infty((0, l) \times (0, \infty)) \cap C([0, l] \times [0, \infty)),$$

siendo solución del problema (3.4.1).

2) Si $u_0 \in L^2([0, l])$ entonces

$$u \in C^\infty((0, l) \times (0, \infty)),$$

es solución del problema (3.4.1), en el sentido que verifica la ecuación y los datos de contorno en $t > 0$ y satisface el dato inicial en el sentido de L^2 , es decir,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(x, t) - u_0(x)\|_2 = 0.$$

Observaciones.

- 1) Como puede verse la ecuación del calor tiene la propiedad de que aunque el dato inicial del problema (3.4.1) no sea regular, en cualquier $t > 0$ la solución es indefinidamente diferenciable en el interior. A esta propiedad nos referiremos diciendo que la ecuación del calor tiene *efecto regularizante*.
- 2) Supongamos el caso $B = 0$, condiciones Dirichlet. La serie solución (3.4.9) se convierte en

$$u(x, t) = \sum_1^\infty a_k \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{l} x \right) e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t}$$

Por tanto, si $t > t_0 > 0$,

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &= e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 t} \left| \sum_1^\infty a_k \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{l} x \right) e^{\left(\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right) t} \right| \leq \\ &\leq M e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 t} \sum_1^\infty e^{\left(\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right) t} \leq C(t_0) e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

siendo la convergencia uniforme en $[0, l]$. El calor se difunde y la temperatura tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito.

- 3) La ecuación del calor describe fenómenos irreversibles; si se cambia t por $\tau = -t$ la ecuación sólo cambia en que el signo más se convierte en menos. Si se mira en la correspondiente serie de Fourier, el decaimiento exponencial en el tiempo se convierte en crecimiento exponencial.

2.- Problema no homogéneo.

Supongamos que $F(x, t) \neq 0$ y que $F \in \mathcal{C}([0, l] \times [0, \infty))$.

Conjeturamos que la solución del problema (3.4.1) tiene la forma

$$(3.4.12) \quad u(x, t) = \sum_0^{\infty} T_k(t)\phi_k(x),$$

donde $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ es la sucesión de autofunciones del problema (3.4.3). Para determinar las funciones T_k , multiplicamos en la ecuación (3.4.1) por $\phi_k(x)$, integramos en $[0, l]$,

$$(3.4.13) \quad \begin{aligned} \int_0^l u_t(x, t)\phi_k(x)dx &= \int_0^l u_{xx}(x, t)\phi_k(x)dx + \int_0^l F(x, t)\phi_k(x)dx = \\ &= \lambda_k \int_0^l u(x, t)\phi_k(x)dx + \int_0^l F(x, t)\phi_k(x)dx, \end{aligned}$$

donde se ha integrado por partes dos veces y se ha usado que ϕ_k es una autofunción. Si suponemos ahora que se puede permutar la suma de la serie (3.4.12) definiendo u , con la integración y usando la ortogonalidad de las autofunciones ϕ_k , obtenemos que T_k debe verificar

$$(3.4.14) \quad \begin{cases} T_k'(t) = \lambda_k T_k(t) + c_k(t) \\ T_k(0) = a_k, \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} c_k(t) = \int_0^l F(x, t)\phi_k(x)dx \\ a_k = \int_0^l u_0(x)\phi_k(x)dx \end{cases}$$

La solución de (3.4.14) la calculamos explícitamente por la fórmula de Lagrange y resulta

$$(3.4.15) \quad T_k(t) = a_k e^{\lambda_k t} + \int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} c_k(s) ds$$

Entonces, formalmente la solución de (3.4.1) la podemos escribir como

$$(3.4.16) \quad u(x, t) = \sum_0^{\infty} (a_k e^{\lambda_k t} + \int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} c_k(s) ds) \phi_k(x).$$

Para terminar justificamos los cálculos realizados con las hipótesis de regularidad que se tienen.

La serie en (3.4.16) la descomponemos en dos partes

$$u_1(x, t) = \sum_0^{\infty} a_k e^{\lambda_k t} \phi_k(x),$$

que es la solución del problema homogéneo, cuyo comportamiento ya hemos estudiado y, de otra parte,

$$u_2(x, t) = \sum_0^{\infty} \left(\int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} c_k(s) ds \right) \phi_k(x)$$

que resuelve el problema (3.4.1) con dato inicial $u_0(x) \equiv 0$.

Observamos que si $F \in \mathcal{C}([0, l] \times (0, \infty))$, se tiene

$$(3.4.17) \quad \begin{aligned} \sum_0^{\infty} \int_0^t |c_k(s)|^2 ds &= \int_0^t \sum_0^{\infty} |c_k(s)|^2 ds = \\ &= \int_0^t \left(\int_0^l |F(x, s)|^2 dx \right) ds, \end{aligned}$$

por el teorema de convergencia monótona y la identidad de Parçeval.

Por consiguiente, las sumas parciales definiendo u_2 verifican la desigualdad

$$(3.4.18) \quad \begin{aligned} \left\| \sum_M^N \left(\int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} c_k(s) ds \right) \phi_k(x) \right\|_2^2 &= \sum_M^N \left| \int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} c_k(s) ds \right|^2 \leq \\ \sum_M^N \left(\int_0^t e^{2\lambda_k(t-s)} ds \right) \int_0^t |c_k(s)|^2 ds &= \sum_M^N \frac{e^{2\lambda_k t} - 1}{2\lambda_k} \int_0^t |c_k(s)|^2 ds, \end{aligned}$$

donde se ha aplicado la desigualdad de Cauchy-Schwartz y de nuevo la identidad de Parçeval. Es decir, las medias cuadráticas en $[0, l]$ de las sumas parciales definiendo a u_2 , convergen uniformemente en $[0, T]$.

De otro lado, teniendo en cuenta que $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ y fijando $T > 0$ de (3.4.18) obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \sum_M^N \left(\int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} c_k(s) ds \right) \phi_k(x) \right| &\leq B \sum_M^N \left| \int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} c_k(s) ds \right| \leq \\ &\leq B \sum_M^N \left(\frac{e^{2\lambda_k t} - 1}{2\lambda_k} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |c_k(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{B}{2} \sum_M^N \frac{e^{2\lambda_k T} - 1}{2\lambda_k} + \frac{B}{2} \sum_M^N \int_0^T |c_k(s)|^2 ds \rightarrow 0, \quad M, N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

pues la primera serie es convergente y

$$\sum_M^N \int_0^T |c_k(s)|^2 ds \leq \int_0^T \int_0^l |F(x, s)|^2 dx ds = A(T),$$

entonces, $u_2 \in \mathcal{C}([0, l] \times (0, \infty))$.

Podemos reescribir la solución u_2 de la forma siguiente

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= \sum_0^{\infty} \phi_k(x) \left(\int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} c_k(s) ds \right) = \\ &= \sum_0^{\infty} \phi_k(x) \left(\int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} \int_0^l F(y, s) \phi_k(y) dy ds \right) = \\ &= \int_0^t \int_0^l \left(\sum_0^{\infty} e^{\lambda_k(t-s)} \phi_k(y) \phi_k(x) \right) F(y, s) dy ds \equiv \int_0^t \int_0^l G(x, y, t, s) F(y, s) dy ds, \end{aligned}$$

donde G es la *función de Green* del problema

$$G(x, y, t, s) \equiv \sum_0^{\infty} e^{\lambda_k(t-s)} \phi_k(y) \phi_k(x).$$

La continuidad de u_2 se puede obtener también de esta expresión. Para obtener el resultado de unicidad y otros resultados de regularidad esperamos al capítulo 6.

3) Datos de contorno no homogéneos.

Para fijar las ideas resolveremos el problema (3.4.1) con las condiciones de contorno siguientes

$$(3.4.19) \quad \begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(l, t) = \mu_2(t). \end{cases}$$

Definimos $w(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$ para que verifique (3.4.19), y hacemos el cambio de variable dependiente $v(x, t) = u(x, t) - w(x, t)$. En la nueva variable resulta

$$v_t - v_{xx} = u_t - u_{xx} - (w_t - w_{xx}) = F(x, t) - (w_t - w_{xx}) \equiv H(x, t),$$

con lo que el problema a resolver es

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = H(x, t) \\ v(0, t) = 0 = v(l, t) \\ v(x, 0) = u_0(x) - (\mu_1(0) - \frac{x}{l}(\mu_2(0) - \mu_1(0))), \end{cases}$$

cuya solución se ha calculado en la etapa previa.

El argumento anterior supone la regularidad suficiente sobre μ_1 y μ_2 . Invitamos al lector a plantearse otras condiciones separadas no homogéneas.

3.5.- Problemas de contorno para la ecuación de ondas: la cuerda vibrante.

Como se dedujo en la sección (1.5) el problema que plantea la vibración de una cuerda sujeta por los extremos es el siguiente

$$(3.5.1) \quad \begin{cases} (1) & u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = F(x, t) \quad 0 < x < l, \quad t \in \mathbf{R} \\ (2) & u(0, t) = 0 = u(l, t), \quad t \in \mathbf{R} \\ (3) & u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, l] \\ (4) & u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in [0, l], \end{cases}$$

donde u_0 es la posición inicial y u_1 la velocidad inicial.

Nos ocuparemos en esta sección del estudio del problema (3.5.1) y como en la sección anterior dividimos el estudio en etapas.

1.- Problema homogéneo, $F(x, t) \equiv 0$.

Procediendo a buscar soluciones de variables separadas se obtiene el problema de autovalores

$$(3.5.2) \quad \begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 = X(l), \end{cases}$$

cuyo estudio se ha hecho en la sección (3.4); es decir, los autovalores de (3.5.2) son

$$\{\lambda_n\}_{n \in \mathbf{N}} = \left\{ -\frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right\}_{n \in \mathbf{N}},$$

siendo las autofunciones correspondientes normalizadas

$$\phi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right).$$

Las ecuaciones resultantes para la variable temporal son

$$T_n''(t) + \left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right) T_n(t) = 0$$

que integrándolas elementalmente dan

$$T_n(t) = c_1 \cos \left(\frac{n\pi t}{l} \right) + c_2 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi t}{l} \right).$$

La solución del problema (3.5.1) se escribe como

$$(3.5.3) \quad u(x, t) = \sum_0^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{l}\right) \right) \sqrt{\frac{2}{l}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Como ha de ser

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) \\ u_t(x, 0) = u_1(x) \end{cases}$$

los coeficientes en (3.5.3) serán

$$(3.5.4) \quad a_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u_0(s) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{l}\right) ds,$$

y como

$$u_t(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_0^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right) b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$(3.5.5) \quad \left(\frac{n\pi}{l}\right) b_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u_1(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

Podemos observar en (3.5.3) que no se obtiene ningún decaimiento en el tiempo y así la serie *no mejora el comportamiento*, al contrario de lo que ocurría con la ecuación del calor. Por tanto, en la ecuación de ondas no encontramos *efecto regularizante*, la convergencia de la serie, y como consecuencia la regularidad de la solución, reposa en la regularidad de los datos iniciales de una manera fundamental.

Si suponemos que

$$(3.5.6) \quad u(x, 0) = u_0(x) \in \mathcal{C}^3([0, l]), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \in \mathcal{C}^2([0, l]),$$

con las condiciones de *compatibilidad*

$$(3.5.7) \quad 0 = u_0(0) = u_0(l) = u_1(0) = u_1(l) = u_0''(0) = u_0''(l),$$

entonces la solución de (3.5.1) definida por (3.5.3) verifica

$$u \in \mathcal{C}^2([0, l] \times (-\infty, \infty)).$$

Las condiciones (3.5.7) son necesarias para que la solución satisfaga puntualmente los datos en la banda $[0, l] \times (-\infty, \infty)$.

De acuerdo con las condiciones (3.5.6) y (3.5.7) y el corolario (3.3.5) se tiene

$$\begin{cases} |a_n| \leq \frac{M_0}{n^3} \\ |b_n| \leq \frac{M_1}{n^3}, \end{cases}$$

por lo que la regularidad se obtiene comprobando que la derivación término a término da series uniformemente convergentes. Se dejan al cuidado del lector las últimas comprobaciones.

Si derivamos la solución u respecto a t y a x obtenemos

$$u_t(x, t) = \sum_0^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right) \left(-a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{l}\right) + b_n \operatorname{cos}\left(\frac{n\pi t}{l}\right)\right) \sqrt{\frac{2}{l}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

y

$$u_x(x, t) = \sum_0^{\infty} \left(a_n \operatorname{cos}\left(\frac{n\pi t}{l}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{l}\right)\right) \sqrt{\frac{2}{l}} \left(\frac{n\pi}{l}\right) \operatorname{cos}\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

respectivamente. Fijado t se obtiene por la identidad de Parseval

$$(3.5.8) \quad \frac{1}{2} \int_0^l (|u_t(x, t)|^2 + |u_x(x, t)|^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^l (|u_1(x)|^2 + |u'_0(x)|^2) dx.$$

La identidad (3.5.8) se conoce como *principio de conservación de la energía*, que podemos leer también diciendo que la suma de las medias cuadráticas de la derivada respecto al tiempo y respecto al espacio son constantes en el tiempo.

Como consecuencia de (3.5.8) se tiene un *resultado de unicidad* de solución para el problema (3.5.1). En efecto, si hubiese dos soluciones u y v la integral de energía para la diferencia $w = u - v$ en $t = 0$ es nula. Por tanto, la energía es nula en todo t , que implica que $w_t = 0$ y $w_x = 0$ en todo punto. Se concluye que $w(x, t) = c$, constante. Pero como $w(x, 0) = 0$ por hipótesis, concluimos que $u(x, t) = v(x, t)$.

Obsérvese que los argumentos anteriores son válidos en tanto que la integral de energía sea finita. Esto es así, suponiendo que $u_1 \in L^2([0, l])$ y que $u'_0 \in L^2([0, l])$. En este caso hay que entender la solución en un sentido débil, del cual no nos ocuparemos por el momento.

Podemos escribir (3.5.3) de la forma

$$(3.5.9) \quad u(x, t) = \sum_0^{\infty} A_n \operatorname{cos}\left(\frac{n\pi}{l}(t + \delta_n)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

siendo

$$A_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \frac{n\pi}{l} \delta_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right).$$

Cada sumando en (3.5.9) se llama *onda estacionaria*; los puntos

$$x = m \frac{l}{n}, \quad m = 1, \dots, (n-1),$$

son los *nodos*, es decir, los puntos que quedan en reposo para todo tiempo en la onda estacionaria. Se llama *vientre de la onda* a los puntos en que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right) = \pm 1,$$

es decir, aquellos en que la amplitud de oscilación es máxima. Evidentemente tales puntos son

$$x = \frac{2m+1}{2n}l,$$

siendo $m = 0, \dots, (n-1)$.

Fijado el tiempo, toda onda estacionaria tiene un perfil sinusoidal pues es

$$u_n(x, t) = c_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

donde

$$c_n(t) = A_n \cos(\omega_n(t + \delta_n)), \quad \text{siendo } \omega_n = \frac{n\pi}{l}.$$

De esta forma queda claro que cada onda estacionaria, u_n , tiene una *frecuencia propia de oscilación*, ω_n , que es igual en todos los puntos.

En los tiempos tales que $\cos(\omega_n(t + \delta_n)) = \pm 1$, las desviaciones son máximas y la velocidad del movimiento es nula.

Por el contrario, en los tiempos en que $\cos(\omega_n(t + \delta_n)) = 0$, la velocidad es máxima y la desviación nula. Con (3.5.9) hemos obtenido la vibración de una cuerda como combinación de ondas estacionarias, es la combinación de *tonos simples*.

2.- Problema no homogéneo, $F(x, t) \neq 0$.

Se procederá como en el caso de la ecuación del calor, es decir, conjeturando que la solución es de la forma

$$(3.5.10) \quad u(x, t) = \sum_0^{\infty} T_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Entonces

$$(3.5.11) \quad \int_0^l (u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t)) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx = \int_0^l F(x, t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \equiv c_n(t),$$

de donde se obtiene por ortogonalidad e integrando por partes

$$(3.5.12) \quad T_n''(t) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = c_n(t),$$

y para que se verifiquen los datos iniciales

$$(3.5.13) \quad \begin{cases} T_n(0) = a_n \\ T_n'(0) = b_n\left(\frac{n\pi}{l}\right), \end{cases}$$

donde a_n y b_n están definidos por (3.5.4) y (3.5.5), respectivamente.

La solución de la ecuación (3.5.12) verificando los datos (3.5.13) se obtiene por la fórmula de variación de las constantes y resulta

$$(3.5.14) \quad T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right) + \frac{l}{n\pi} \int_0^t c_n(s) \sin\left(\frac{n\pi}{l}(t-s)\right) ds.$$

Basta sustituir en (3.5.10). La regularidad depende de los datos y será estudiada en el capítulo dedicado a la ecuación de ondas.

3.6.- El problema de Dirichlet en el semiplano positivo. La transformación de Fourier.

El problema que estudiamos en esta sección tiene como dificultad añadida que el dominio no es acotado, concretamente consideraremos el semiplano positivo,

$$\mathbf{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\},$$

entonces su cierre es

$$\bar{\mathbf{R}}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq 0\}.$$

Nos planteamos el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en \mathbf{R}_+^2 , es decir, el problema

$$(3.6.1) \quad \begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in \mathbf{R}_+^2 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

donde por el momento supondremos que f es lo regular que se necesite para que los cálculos sean válidos. Más adelante precisaremos dicha regularidad.

Es obvio que tal como hemos planteado el problema en (3.6.1), en general, no tiene solución única; en efecto, si suponemos por ejemplo $f \equiv 0$, $u(x, y) \equiv 0$ y $v(x, y) = y$ son soluciones de (3.6.1) con dato nulo. Lo que ocurre es que al ser \mathbf{R}_+^2 un dominio no acotado hay parte de su frontera en que no hemos fijado ningún dato, no se ha fijado el dato *en el infinito*, o dicho más precisamente, no hemos fijado qué pasa con la solución cuando $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$.

Tal condición en *el infinito* se va a introducir pidiendo acotación en \mathbf{R}_+^2 . Es decir, consideraremos el problema

$$(3.6.2) \quad \begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in \mathbf{R}_+^2 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R} \\ |u(x, y)| \leq M < \infty, & (x, y) \in \bar{\mathbf{R}}_+^2. \end{cases}$$

Como en las secciones previas, la idea es utilizar el método de separación de variables, es decir, buscar soluciones de la ecuación de Laplace de la forma

$$U(x, y) = X(x)Y(y).$$

Al sustituir en la ecuación, se obtienen las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$(3.6.3) \quad \begin{cases} X''(x) + cX(x) = 0 \\ Y''(y) - cY(y) = 0. \end{cases}$$

Para $c \neq 0$ las soluciones de las ecuaciones de (3.6.3) son

$$(3.6.4) \quad \begin{cases} X(x) = ae^{i\sqrt{c}x} + be^{-i\sqrt{c}x} \\ Y(y) = Ae^{\sqrt{c}y} + Be^{-\sqrt{c}y}. \end{cases}$$

Como u debe ser acotada, necesariamente ha de ser $c > 0$ y $A = 0$. Poniendo $c = (2\pi\xi)^2$ para $\xi \in (-\infty, \infty)$, resulta $2\pi\xi = \pm\sqrt{c}$, luego

$$(3.6.5.) \quad u_\xi(x, y) = X(x)Y(y) = e^{-2\pi|\xi|y}e^{2\pi i\xi x}$$

En analogía a lo que se hace con las series de Fourier en los casos estudiados en las secciones previas, sería razonable escribir la solución como

$$(3.6.6) \quad u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi)e^{-2\pi|\xi|y}e^{2\pi i\xi x}d\xi.$$

Pero como debe satisfacerse

$$(3.6.7) \quad u(x, 0) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi,$$

donde *los coeficientes de Fourier* son ahora una familia continua y parece natural definirlos por

$$(3.6.8) \quad a(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \xi} f(t) dt,$$

en analogía al caso de las series de Fourier

Al menos formalmente, sustituyendo (3.6.8) en (3.6.6) y suponiendo que se verifican las hipótesis para que el cambio de orden de integración sea lícito, se obtiene

$$\begin{aligned}
(3.6.9) \quad u(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \xi} f(t) dt \right) e^{-2\pi |\xi| y} e^{2\pi i \xi x} d\xi = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi |\xi| y} e^{2\pi i \xi (x-t)} d\xi \right) dt.
\end{aligned}$$

Pero tenemos que

$$(3.6.10) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi |\xi| y} e^{2\pi i \xi (x-t)} d\xi = \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2},$$

puesto que

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi |\xi| y} e^{2\pi i \xi s} d\xi = \\
&= \int_{-\infty}^0 e^{2\pi \xi (is+y)} d\xi + \int_0^{\infty} e^{2\pi \xi (is-y)} d\xi = \\
&= \frac{1}{2\pi(is+y)} - \frac{1}{2\pi(is-y)} = \frac{y}{\pi(s^2 + y^2)}.
\end{aligned}$$

De (3.6.10) y (3.6.9) se concluye

$$(3.6.11) \quad u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} f(t) dt.$$

La función

$$P(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

es el *núcleo de Poisson* en el dominio \mathbf{R}_+^2 .

Son muy fáciles de comprobar las siguientes propiedades de $P(x, y)$:

$$(3.6.12) \quad P(x, y) \geq 0, \quad \text{en } \mathbf{R}_+^2,$$

$$(3.6.13) \quad \int_{-\infty}^{\infty} P(x, 1) dx = 1,$$

$$(3.6.14) \quad \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y) dx = \frac{1}{y} \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\frac{x}{y}, 1\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} P(s, 1) ds = 1,$$

$$(3.6.15) \quad \int_{|x|>\delta} P(x, y) dx = 1 - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\delta}{y}\right) \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0,$$

$$(3.6.16) \quad \Delta P \equiv P_{xx} + P_{yy} = 0, \quad \text{en } \mathbf{R}_+^2.$$

Una demostración exactamente igual a la del teorema (3.3.3) establece el siguiente resultado

3.6.1 Teorema.

Sea $g \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$, tal que $\sup_{x \in \mathbf{R}} |g(x)| < M < \infty$.

Entonces

$$v(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x-t, y)g(t)dt$$

verifica

- (1) $\Delta v = 0$ en \mathbf{R}_+^2
- (2) $|v(x, y)| \leq M$ si $(x, y) \in \bar{\mathbf{R}}_+^2$
- (3) $\lim_{y \rightarrow 0} v(x, y) = g(x)$, uniformemente sobre compactos de \mathbf{R} .

De esta forma hemos encontrado solución al problema (3.6.2). La unicidad de solución para el problema (3.6.2) es una cuestión más delicada y la posponemos al capítulo 5.

Tras el estudio realizado de las series de Fourier y de sus aplicaciones, es natural interesarse por la expresión (3.6.8), con la esperanza de que resulte igualmente útil para representar funciones definidas sobre la recta real. De acuerdo con (3.6.8) formulamos la definición siguiente.

3.6.2. Definición.

Sea f una función integrable en \mathbf{R} , es decir, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty.$$

Se define la transformada de Fourier de f por

$$(3.6.17) \quad \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \xi} f(t) dt$$

Para coger confianza con el nuevo objeto introducido, es conveniente calcular una transformada de Fourier. Concretamente calcularemos la de la función gaussiana, es decir, la transformada de Fourier de

$$g(x) = e^{-a\pi|x|^2}, \quad a > 0.$$

Escribiendo la fórmula (3.6.17) para la función g se tiene

$$(3.6.18) \quad \widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \xi} e^{-a\pi|t|^2} dt,$$

poniendo

$$\pi at^2 + 2\pi it\xi = (\sqrt{a\pi}t + i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\xi)^2 + \frac{\pi}{a}\xi^2$$

resulta

$$(3.6.19) \quad \widehat{g}(\xi) = e^{-\frac{\pi}{a}\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a\pi}t + i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\xi)^2} dt.$$

Calcularemos la integral que queda en (3.6.19) usando variable compleja. Fijado ξ y para cada $R > 0$ consideramos el camino de integración Γ definido por el segmento del eje real que va de $-R + i0$ a $R + i0$, el segmento vertical que une el punto $R + i0$ y el punto $R + i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\xi$, el segmento horizontal uniendo el punto $R + i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\xi$ con el punto $-R + i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\xi$ y por último, el segmento vertical uniendo el punto $-R + i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\xi$ con $-R + i0$. El interior de Γ es un rectángulo que llamaremos \mathcal{R}_Γ , donde la función de variable compleja $h(z) = e^{-z^2}$, es analítica. El teorema de Cauchy implica entonces que

$$\int_{\Gamma} e^{-z^2} dz = 0,$$

como además

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_0^{(\frac{\pi}{a})^{1/2}\xi} e^{-(\sqrt{a\pi}R + is)^2} ds \right| = 0,$$

resulta que

$$(3.6.20) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a\pi}t + i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\xi)^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\pi t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{a\pi}} = \frac{1}{\sqrt{a}},$$

dado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}.$$

Por tanto sustituyendo en (3.6.19) obtenemos

$$(3.6.21) \quad \widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\pi}{a}\xi^2},$$

que muestra como *la transformada de Fourier de una gaussiana es otra gaussiana*. Este ejemplo es el que servirá de norma para estudiar la transformada de Fourier.

Dado el éxito obtenido con la gaussiana, vamos a fijarnos en algunas de sus propiedades; fundamentalmente en las dos siguientes.

- 1) Toda gaussiana, $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$.
- 2) Dada una gaussiana g y sendos enteros no negativos n y m se verifica

$$(3.6.22) \quad \sup_{x \in \mathbf{R}} |x^m \frac{d^n g}{dx^n}(x)| < c(n, m),$$

donde $c(n, m)$ es una constante dependiendo de n y m .

Ambas propiedades se obtienen por cálculo directo sin ninguna dificultad. Agruparemos en una familia a todas las funciones verificando las propiedades 1) y 2) de la gaussiana. Tal clase de funciones se suele designar por $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ en honor de Laurent Schwartz, quien por primera vez la introdujo como tal clase, llamándola *clase de funciones temperadas*. El nombre es bastante afortunado pues quiere decir que una función está en $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ si ella y cualquier derivada suya tiende a cero en el infinito más rápidamente que cualquier polinomio, como el lector puede probar con un cálculo rutinario.

Para ser un poco más formales, escribimos en detalle la definición de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$,

$$(3.6.23) \quad \mathcal{S}(\mathbf{R}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \mid \sup_{x \in \mathbf{R}} |x^m \frac{d^n f}{dx^n}(x)| \leq c_{n,m} < \infty, n, m \in \mathbf{N}\}.$$

De la propia definición de \mathcal{S} se sigue que

- a) Si $f, g \in \mathcal{S}$ y $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, entonces $\alpha f + \beta g \in \mathcal{S}$
- b) Si $f, g \in \mathcal{S}$, entonces $fg \in \mathcal{S}$.

Además si f es una función temperada, tomando en (3.6.22) $n = 0$ y $m = 2$ se tiene

$$(3.6.24) \quad |(1 + |x|^2)f(x)| \leq M,$$

por tanto,

$$(3.6.25) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \leq M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} < \infty,$$

es decir, f es integrable.

La observación anterior implica, en particular, que la transformada de Fourier de $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ está bien definida pues

$$(3.6.26) \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \xi} f(t) dt,$$

y la integral es finita. Obsérvese que además de (3.6.26) y (3.6.25) se concluye

$$(3.6.27) \quad \sup_{\xi \in \mathbf{R}} |\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

La correcta lectura de (3.6.27) es que la transformada de Fourier de una función integrable es acotada y entonces, en particular, esto es cierto si $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

Las propiedades más elementales de la transformada de Fourier de funciones temperadas ponen de manifiesto cómo serán las aplicaciones de ella a las ecuaciones en derivadas parciales.

3.6.3. Teorema.

Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, entonces

(1) $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ y además

$$(3.6.28) \quad \frac{d^k \widehat{f}}{d\xi^k}(\xi) = \widehat{g}(\xi), \quad \text{siendo } g(x) = (-2\pi i x)^k f(x).$$

(2) $\frac{d^k f}{dx^k}(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, verificándose

$$(3.6.29) \quad \widehat{\frac{d^k f}{dx^k}}(\xi) = (2\pi i \xi)^k \widehat{f}(\xi).$$

(3) Si se supone también que g es una función integrable y se define

$$(3.6.30) \quad h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt \equiv f * g(x),$$

integral de convolución de f y g , se tiene que h es integrable y que

$$(3.6.31) \quad \widehat{h}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

(4) $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

Demostración.

1) Si se escribe la transformada de Fourier

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \xi} f(t) dt,$$

teniendo en cuenta que $\frac{d^k}{d\xi^k}(f(x)e^{-2\pi x\xi})$ es integrable en valor absoluto, se puede derivar bajo el signo integral, resultando

$$\frac{d^k \widehat{f}}{d\xi^k}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d^k}{d\xi^k}(e^{-2\pi t\xi}) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-2\pi it)^k e^{-2\pi it\xi} dt,$$

y llamando $g(x) = (-2\pi ix)^k f(x)$, se tiene (3.6.28).

- 2) Que $\frac{d^k f}{dx^k} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, es una consecuencia inmediata de la definición de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Para establecer la fórmula (3.6.29) basta hacerlo para $k = 1$ y reiterar la prueba. Pero, integrando por partes,

$$\frac{d\widehat{f}}{dx}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi it\xi} \frac{df}{dt}(t) dt = (-2\pi i\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi it\xi} f(t) dt = (-2\pi i\xi) \widehat{f}(\xi),$$

que es (3.6.29) con $k = 1$.

- 3) Que h es integrable es consecuencia inmediata del teorema de Fubini-Tonelli sobre inversión del orden de integración, en efecto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |g(x-t)| dt \right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-t)| dx \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)| du \right) dt = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)| du \right). \end{aligned}$$

Para obtener (3.6.31) efectuamos el cálculo directamente

$$\begin{aligned} \widehat{h}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi it\xi} h(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi it\xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x) dx \right) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) e^{-2\pi it\xi} dt \right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) e^{-2\pi i(t-x)\xi} dt \right) e^{-2\pi ix\xi} dx = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi), \end{aligned}$$

que es la identidad buscada.

- 4) Hemos de establecer que si $m \geq 0$ y $n \geq 0$ son números enteros, se verifica

$$|\xi^m \frac{d^n \widehat{f}}{d\xi^n}(\xi)| \leq C,$$

que, por los apartados 1) y 2) anteriores, es equivalente a

$$(3.6.32) \quad \xi^m \frac{d^n \widehat{f}}{d\xi^n}(\xi) = a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \xi} \frac{d^m}{dt^m} (t^n f(t)) dt.$$

Por definición, la función $g(x) = \frac{d^m}{dx^m} (x^n f(x)) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, por tanto, (3.6.27) implica que

$$|\widehat{g}(\xi)| < C,$$

como queríamos demostrar. \square

Podemos resumir el contenido del teorema (3.6.3) diciendo que, en primer lugar, la transformada de Fourier *aplica* \mathcal{S} en \mathcal{S} ,

$$\widehat{\cdot} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}.$$

En segundo lugar:

- a) La transformada de Fourier transforma derivación en multiplicación por monomios, como indica la fórmula (3.6.29).
- b) La derivación de la transformada de Fourier es la transformada de Fourier del producto de un monomio por la función, como precisa la fórmula (3.6.28).
- c) El producto de convolución es transformado en el producto de las transformadas de Fourier, como expresa (3.6.31).

Observaciones.

- (1) La transformada de Fourier se extiende a \mathbf{R}^N por la fórmula

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} f(t) e^{-2\pi i \langle t, \xi \rangle} dt,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar en \mathbf{R}^N .

- (2) La transformación de Fourier permite que un problema diferencial se convierta en un problema algebraico, por ejemplo, si se quiere resolver el problema

$$(3.6.33) \quad \Delta u = f, \quad \text{en } \mathbf{R}^2,$$

se transforma en

$$(3.6.34) \quad -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi).$$

Evidentemente, para que la estrategia expuesta culmine con éxito el cálculo de una solución de (3.6.33), es necesario saber si es posible recuperar una función a partir de su transformada de Fourier, es decir, *necesitamos saber invertir la transformada de Fourier*. A esta importante cuestión dedicamos el resto de esta sección.

El apartado 4) del teorema (3.6.3) tiene como caso particular que

$$(3.6.35) \quad \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0,$$

que puede verse como una extensión a la transformada de Fourier del teorema de Riemann-Lebesgue demostrado para series de Fourier, es decir, tenemos un resultado de localización. Realmente el resultado, que es conocido también como teorema de Riemann-Lebesgue, es para funciones integrables y puede obtenerse de (3.6.35) por un argumento de densidad de \mathcal{S} en las funciones integrables. Tal resultado de densidad se puede obtener siguiendo las indicaciones del ejercicio 33 de este capítulo.

3.6.4. Teorema. (*Riemann-Lebesgue*)

Sea f función integrable en \mathbf{R} , es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} |f| dx < \infty$, entonces

$$(3.6.36) \quad \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0.$$

Demostración.

Para f función integrable y $\varepsilon > 0$ existe $g \in \mathcal{S}$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f - g| dx < \varepsilon.$$

Entonces

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq |\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| + |\widehat{g}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f - g| dx + |\widehat{g}(\xi)|,$$

que teniendo en cuenta (3.6.35), implica que para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(\xi)| \leq \varepsilon,$$

probándose el resultado. \square

Recogemos a continuación un resultado elemental e importante.

3.6.5. Lema.

Sean $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Entonces

$$(3.6.37) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\widehat{g}(y)dy.$$

Demostración.

Basta utilizar el teorema de Fubini,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \xi} g(t) dt \right) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \xi} f(\xi) d\xi \right) dt$$

que prueba el resultado. \square

Este resultado y el hecho que la transformada de Fourier de una gaussiana es otra gaussiana serán los ingredientes fundamentales de la prueba del teorema de inversión.

Si $f \in \mathcal{S}$ hemos demostrado que $\widehat{f} \in \mathcal{S}$, entonces tiene sentido la siguiente definición.

3.6.6. Definición. (*Transformada inversa de Fourier*)

Sea \widehat{f} transformada de Fourier de $f \in \mathcal{S}$ se define

$$(\widehat{f})^\sim(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi,$$

La conjetura es que $(\widehat{f})^\sim = f$. El resultado siguiente prueba esta conjetura.

3.6.7. Teorema. (*inversión de la transformada de Fourier*)

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, entonces $(\widehat{f})^\sim = f$

Demostración.

Hemos de probar que

$$(3.6.38) \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Para $\varepsilon > 0$ consideramos la gaussiana

$$g_\varepsilon(\xi) = e^{-\pi \varepsilon^2 \xi^2},$$

por el lema (3.6.5) se tiene

$$(3.6.39) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t \xi} \widehat{f}(\xi) g_\varepsilon(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \widehat{e^{2\pi i t \xi} g_\varepsilon}(\xi) d\xi.$$

Llamando $h_\varepsilon(x) = e^{2\pi itx} g_\varepsilon(x)$ se tiene

$$(3.6.40) \quad \hat{h}_\varepsilon(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x) e^{-2\pi i(t-\xi)x} dx = \hat{g}_\varepsilon(t-\xi) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\pi \frac{|t-\xi|^2}{\varepsilon^2}},$$

en virtud de (3.6.21). Sustituyendo en (3.6.39) resulta

$$(3.6.41) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi it\xi} \hat{f}(\xi) e^{-\pi \varepsilon^2 \xi^2} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{1}{\varepsilon} e^{-\pi \frac{|t-\xi|^2}{\varepsilon^2}} d\xi = f_\varepsilon(t).$$

Si llamamos $\phi(x) = e^{-\pi x^2}$ se tiene $\phi(x) > 0$ y $\int_{\mathbf{R}} \phi(x) dx = 1$. Para $\varepsilon > 0$ definimos

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

es obvio por cambio de variable en la integral que también

$$\int_{\mathbf{R}} \phi_\varepsilon(x) dx = 1.$$

Por consiguiente podemos escribir la última igualdad en (3.6.41) como

$$f_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \phi_\varepsilon(t-\xi) d\xi.$$

Probaremos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = f(x).$$

En efecto,

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\varepsilon(\xi) |f(x-\xi) - f(x)| d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) |f(x-\varepsilon y) - f(x)| dy.$$

Dado $\eta > 0$, elegimos $R > 0$ tal que

$$\int_{|y|>R} \phi(y) dy \leq \frac{\eta}{2},$$

entonces si $M = \sup_{y \in \mathbf{R}} |f(y)|$ podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) |f(x-\varepsilon y) - f(x)| dy \leq \int_{-R}^R \phi(y) |f(x-\varepsilon y) - f(x)| dy + M\eta.$$

Pero la continuidad uniforme de f sobre compactos implica que dado $\eta > 0$ podemos elegir $\delta > 0$ tal que si $|\varepsilon y| < \delta$, se verifica que $|f(x - \varepsilon y) - f(x)| \leq \eta$ cualquiera que sea $|x| \leq R$; por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) |f(x - \varepsilon y) - f(x)| dy \leq \eta \int_{-R}^R \phi(y) dy + M\eta \leq \eta(1 + M),$$

que es lo que queríamos probar.

Para finalizar la demostración del teorema, obsérvese que en el primer término de (3.6.41) se puede aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, resultando

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi x \xi} e^{-\varepsilon^2 \pi \xi^2} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi,$$

con lo que se concluye (3.6.38). \square

El teorema (3.6.7) tiene una cuantificación muy interesante.

3.6.8. Teorema. (*Identidad de Plancherel*)

Si $f \in \mathcal{S}$ se verifica

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$$

Demostración.

Sea $g(x) = f(-x)$ y, por tanto, $\widehat{g}(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$. Las propiedades de la transformada de Fourier demostradas en el teorema (3.6.3) nos permiten escribir la siguiente cadena de identidades

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(x) dx \equiv f * g(0) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{(f * g)}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\widehat{f}\|_2^2. \end{aligned}$$

\square

Para acabar esta sección notaremos que el teorema (3.6.8) y la densidad de \mathcal{S} en L^2 , permite definir la transformada de Fourier sobre L^2 . En efecto, sea $f \in L^2$ y supongamos $\{g_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{S}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - f\|_2 = 0.$$

Definimos

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{g}_n(\xi).$$

Es obvio que, de esta manera, la transformada de Fourier es inversible en L^2 verificándose además que es una *isometría* en L^2 por tenerse la extensión de la identidad de Plancherel a L^2 , es decir,

$$(Identidad de Plancherel) \quad \|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2, \quad \text{para toda } f \in L^2$$

EJERCICIOS DEL CAPITULO 3

1. Estudiar si tienen solución los problemas:

- a) $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 1$.
 b) $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 1$.

2. Resolver los siguientes problemas de contorno:

- a) $y'' = \alpha^2 sy$, $y(0) = v$, $y'(x_0) = 0$, $\alpha, s \in \mathbf{R}$.
 b) $y'' - \alpha^2 sy = 0$, $y(0) = \frac{1}{s}$, $y'(x_0) = 0$, $\alpha, s \in \mathbf{R}$.

Discútanse los casos de compatibilidad.

3. Resolver de manera elemental los problemas

- a) $y^{(iv)} - \lambda^4 y = 0$, $y(0) = y''(0) = 0$, $y(\pi) = y''(\pi) = 0$.
 b) $y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0$, $y(0) = -\frac{1}{2}$, $y'(0) = \frac{3}{2}$, $y(1) = 0$.

4. Obténgase la función de Green asociada a los problemas:

- a) $y'' = 0$, $y(0) = y'(1)$, $y'(0) = y(1)$.
 b) $y'' = 0$, $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$.
 c) $y'' - y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$.
 d) $x^2 y'' + xy' - y = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = l$, $y(1) = 0$.

5. Calcular la solución de los siguientes problemas:

- a) $y'' + y = x$, $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$.
 b) $xy'' + y' = x$, $y(1) = y(e) = 0$.
 c) $y'' + \pi^2 y = \cos(\pi x)$, $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$.
 d) $y'' + y = x^2$, $y(0) = y(\frac{\pi}{2})$, $y'(0) = y'(\frac{\pi}{2})$.

6. Hallar los autovalores y las autofunciones para el operador diferencial $y'' = \lambda y$ con los datos de contorno siguientes: a) $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$; b) $y(0) = y(2\pi) = 0$; c) $y(0) = 0 = y(1)$; d) $y(0) = y(L) = 0$, $L > 0$; e) $y(-L) = y(L) = 0$, $L > 0$; f) $y(a) = 0 = y(b)$, $a < b$.

7. Sea $h : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ función continua. Sea la ecuación

$$y'' - h(x)y = 0$$

y las condiciones de contorno

$$(a) \quad \begin{cases} y(a) + 2y(b) + y'(b) = 0 \\ 2y(a) - y(b) - y'(a) - y'(b) = 0 \end{cases}$$

y

$$(b) \quad \begin{cases} y(a) + y'(b) = 0 \\ y(b) + y'(a) = 0 \end{cases}$$

En cada caso determínese si el correspondiente problema es autoadjunto.

8. Utilícese la identidad de *Parseval-Bessel* para demostrar que

$$(a) \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

$$(b) \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Indicación.- Tómese el problema de contorno $y'' = \lambda y$, $y(0) = y(\pi) = 0$ y desarróllense en serie de autofunciones $f_1(x) = 1$ y $f_2(x) = x$, respectivamente.

9. Pruébese que

$$\frac{t(\pi-t)}{2} = \sum_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(kt)}{k^2}, \quad \text{si } t \in [0, \pi]$$

Indicación.- Utilícese el mismo problema de contorno que en el problema anterior.

10. Sea el problema de autovalores

$$\begin{cases} y'' = \lambda y \\ y(0) = 0 \\ \alpha y(1) + y'(1) = 0, \end{cases}$$

donde $\alpha \in \mathbf{R}$ y $\alpha \neq -1$. Sea $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ la sucesión de autovalores. Calcúlese

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$$

11. Sea $f \in C^k$, $k > 1$, 2π -periódica y sea

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(s)e^{-ins} ds.$$

Probar que

$$S_N f(x) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n)e^{inx}$$

converge uniformemente a f cuando $N \rightarrow \infty$, y además se verifica

$$\sup_{x \in [0, 2\pi]} |S_N f(x) - f(x)| \leq \frac{C}{N^{k-\frac{1}{2}}}.$$

12. Sea $f(x) = e^x$ en $[-\pi, \pi]$ y se extiende periódicamente a \mathbf{R} . Determínese la suma de su serie de Fourier en $x = \pi$.

13. Calcúlese la serie de Fourier de $f(x) = 1$ en $0 \leq x \leq \pi$ respecto de $\phi_n(x) = \sin nx$. Integrando esta serie determínese una serie que converja a $g(x) = x$ en el mismo intervalo.

14. Pruébese que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \log x \sin nx dx = 0$.

15. Se considera la serie

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{\text{sen}(n!x)}{n^2}.$$

Pruébese que define una función continua. Si se considera la serie derivada término a término, ¿converge en media cuadrática a alguna función?

16. Sea la ecuación diferencial

$$(E) \quad y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x), \quad p_1, p_2 \in \mathbf{R},$$

donde f es 2π -periódica.

Utilizar las series de Fourier para obtener una solución 2π -periódica de (E), dando condiciones para su existencia. Aplíquese a calcular soluciones periódicas de las ecuaciones:

$$(a) \quad y'' + 4y = \sum_3^\infty \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}.$$

$$(b) \quad y'' + y = \cos x.$$

$$(c) \quad y'' - y = |\text{sen } x|.$$

17. Sea $\lambda \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$. Desarrollar en serie de Fourier en $[-\pi, \pi]$ las funciones $f(t) = \cos(\lambda t)$ y $\sin(\lambda t)$, estudiando para que puntos convergen estos desarrollos. Probar que

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)} = \frac{1}{x} + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n 2x}{x^2 - n^2}, \quad \text{si } x \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}.$$

18. Sea el problema

$$\begin{cases} x^2 y'' + 2xy' + \frac{1}{4}y = f(x) \\ y(1) = y(e) = 0 \end{cases}$$

Estúdiense si es autoadjunto. Escribábase la solución utilizando la función de Green. Calcúlense los autovalores y las autofunciones del problema. Determinéase la solución para $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ en forma de serie.

19. Para $f \in \mathcal{C}([0, \pi])$ arbitraria, resolver el problema

$$\begin{cases} y'' - y = f(x) \\ y'(0) = y'(\pi) = 0, \end{cases}$$

mediante desarrollo en serie de autofunciones.

Obtener directamente una solución en el caso $f(x) = \sin x$ y comparando ambos resultados, calcular la sumas

$$a) \sum_1^{\infty} \frac{1}{(4n^2 + 1)(4n^2 - 1)}; \quad b) \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^2 + 1)(4n^2 - 1)}.$$

20. Sea la función 10-periódica definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 5. \end{cases}$$

- a) Hallar sus coeficientes de Fourier.
 b) ¿Cómo habría de definirse f en $x = -5$, $x = 0$ y $x = 5$, para que la serie de Fourier converja en todo punto?

21. Considérense las curvas planas simples, cerradas, \mathcal{C}^1 y de longitud unidad.

Calcúlense de entre ellas la que encierra área máxima.

Indicación.-

- i) $\text{Longitud} = 1 = \int_0^1 ((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{1/2} dt$,
 ii) *Utilizando la fórmula de Green en el plano el área encerrada es*
 $\text{Area} = \int_0^1 (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt$,
 iii) *Utilícense series de Fourier*

22. Obténgase por separación de variables la solución del problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, \pi) = 0 \\ u(x, 0) = \sin^2 x \end{cases}$$

23. Calcúlese la función armónica conjugada de la solución de

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & x^2 + y^2 < 1 \\ u(e^{i\theta}) = f(\theta), & f \in \mathcal{C}([0, 2\pi]). \end{cases}$$

Hágase el cálculo formal que da el valor de frontera de dicha función conjugada.

24. Sea $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ y consideremos $F = \nabla v$ de forma que

$$v|_{\partial D} = \log\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right).$$

Hállese razonadamente el mínimo de

$$E = \iint_D |F|^2 dx dy,$$

sobre los campos gradiente definidos antes.

25. Obténgase una transformación conforme que reduzca el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \mathbf{R}_+^2 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R} \\ |u(x, y)| < c, & (x, y) \in \bar{\mathbf{R}}_+^2, \end{cases}$$

al problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el disco unidad.

26. Hallar la solución $u(x, t)$ del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases} \end{cases}$$

en forma de serie y estudiar su convergencia.

27. Resolver mediante el método de Fourier los siguientes problemas:

$$(a) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = 0 = u(1, t), & t > 0 \\ u(x, 0) = 1 - x^2, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = e^{-t}, \quad u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = x^2, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 25, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(25, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{10}\right), & 0 \leq x \leq 25. \end{cases}$$

$$(d) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = x, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = e^{-t}, \quad u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$(e) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = e^{-t}, \quad u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$(f) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} + u_x = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = -x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$(g) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = \operatorname{sen}(xt), & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0 = u_x(\pi, t), & t > 0 \\ u(x, 0) = \operatorname{sen} x. \end{cases}$$

$$(h) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) + u_x(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \operatorname{sen}^2(\pi x). \end{cases}$$

$$(i) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = \frac{x}{\pi} + e^{-t}(\frac{x}{\pi} - 1), & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = e^{-t}, \quad u(\pi, t) = t, & t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$(j) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$(k) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

28. Resuélvanse los siguientes problemas por el método de Fourier,

$$(a) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 < x < \pi \\ u_t(x, 0) = x^2(\pi - x), & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \cos(x + t), & 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 < x < \pi \\ u_t(x, 0) = x^2(\pi - x), & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_t = 0, & 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right), & 0 < x < \pi \\ u_t(x, 0) = x \cos\left(\frac{x}{2}\right), & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$(d) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = xt, & 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

29. Resolver mediante el método de Fourier los siguientes problemas.

$$(a) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & -\pi < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(-\pi, t) = 0 = u(\pi, t), & t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & -\pi < x < \pi \\ u_t(x, 0) = \cos\left(\frac{7}{2}x\right), & -\pi < x < \pi. \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & -\pi < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(-\pi, t) = 0 = u(\pi, t), & t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \operatorname{sen}(7x) - \operatorname{sen}(3x), & -\pi < x < \pi \\ u_t(x, 0) = 0, & -\pi < x < \pi. \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 50 \operatorname{sen}(5x) \operatorname{sen}(5t), & 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(0, t) = 0 = u(\pi, t), & t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$(d) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(0, t) = 0 = u_x(1, t), & t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < 1 \\ u_t(x, 0) = \operatorname{sen}^3(\pi x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

$$(e) \quad \begin{cases} u_{tt} = 256u_{xx}, & 0 < x < 2, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(0, t) = 0 = u_x(2, t), & t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{48}x & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{48}(2-x) & 1 \leq x \leq 2, \end{cases} & 0 < x < 1 \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 < x < 2. \end{cases}$$

$$(f) \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(0, t) = \operatorname{sen}(kct), \quad k \in \mathbf{N}, \quad u_x(\pi, t) = 0, & t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$(g) \quad \begin{cases} 9u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(0, t) = 0 = u(1, t) = 0, & t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = x(1-x), & 0 < x < 1 \\ u_t(x, 0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

30. Sea f función integrable sobre \mathbf{R} , es decir,

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)| dx < \infty$$

y sea

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \xi} f(t) dt$$

su transformada de Fourier. Pruébese:

a) $|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbf{R}} |f(x)| dx$ para todo $\xi \in \mathbf{R}$

b) $\hat{f}(\xi) \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$

c) $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$

31. Sea $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ tal que

$$|f(x)| + |f'(x)| + |f''(x)| \leq \frac{k}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Probar

a) $\sum_{-\infty}^{\infty} f(x+n)$, converge uniformemente en $0 < x < 1$ a una función, $f^0(x)$, 1-periódica.

b) $f^0 \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$

c) Utilizar el desarrollo en serie de Fourier de f^0 para probar la fórmula de sumación de Poisson,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n).$$

32. Sea el operador diferencial ordinario,

$$L[y] \equiv -y'' + y.$$

Sea $E(x)$ tal que

$$\hat{E}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2 \xi^2 + 1}.$$

Probar que

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x-y) f(y) dy$$

es solución de $L[y] = f$.

33. Probar que \mathcal{S} es denso en L^1 , espacio de funciones integrables.

Indicación.-

a) Considérese $\hat{h}_\varepsilon(x-t)$, definida en (3.6.40), que es una función temperada. Dada $g \in L^1$, pruébese que $g_\varepsilon(x) = \int_{\mathbf{R}} \hat{h}_\varepsilon(x-t) g(t) dt$ es temperada.

b) Pruébese que $\int_{\mathbf{R}} |g_\varepsilon(x) - g(x)| dx \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

34.

Sea $F(x, t)$ una función continua en $[a, b] \times [a, b]$ tal que

$$\iint_{[a,b] \times [a,b]} F(x, t) f(x) g(t) dx dt = 0$$

para todas las funciones $f, g \in C([a, b])$. Demostrar que F es simétrica, es decir, que $F(x, t) = F(t, x)$ para todo $(t, x) \in [a, b] \times [a, b]$.

Aplíquese a probar la propiedad de simetría (3.2.10 b).

35.

Consideremos el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} y'' = 0 \\ y(0) = y'(0), \quad y(1) = y'(1). \end{cases}$$

- ¿Es autoadjunto?
- Calcular la función de Green, en caso que exista.
- Resolver el problema

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{1+x^2} \\ y(0) = y'(0), \quad y(1) = y'(1) \end{cases}$$

36.

Consideremos el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

- Calcular la función de Green, en caso que exista.
- Resolver el problema

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^x \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

37.

Dada la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq L. \\ \text{Datos de Contorno,} \end{cases}$$

experimentalmente se conoce que $u(x, t) \rightarrow S(x)$ cuando $t \rightarrow \infty$. S recibe el nombre de solución estacionaria, y la diferencia $R(x, t) = u(x, t) - S(x)$ recibe el nombre de solución transitoria. Calcular S y R en los casos siguientes:

- Datos de contorno $u(0, t) = A, \quad u(L, t) = B$.
- Datos de contorno $u_x(0, t) = 0 = u_x(L, t)$.
- Explicar en cada caso cómo depende S del dato inicial u_0 .