CAPITULO 2

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE PRIMER ORDEN. EL PROBLEMA DE CAUCHY.

Introducción

Este capítulo está dedicado al estudio de las *ecuaciones en derivadas parciales de primer orden* que se han motivado en la sección 1.7. Concretamente se estudiará el problema de Cauchy o problema de valores iniciales, que plantearemos precisamente en su lugar y momento adecuados.

Hay que decir que este tema clásico es de gran importancia para establecer resultados en ecuaciones más generales. Por ejemplo, el teorema de existencia de Cauchy-Kovalevsky para datos analíticos necesita de los resultados de este capítulo como se establecerá en la última sección. También será necesario para clasificar las ecuaciones en derivadas parciales según tipos.

Por concreción se presentan todos los resultados en dimensión tres, empezando en la sección 2.1 con el caso más simple de las *ecuaciones quasi lineales.* La sección 2.2 se dedicará a la ecuación más general.

Las dos últimas secciones se dedican a aplicar lo estudiado a la clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden y a probar un caso particular del teorema de Cauchy-Kovalevsky, respectivamente. Esta última sección puede ser omitida en una primera lectura.

En un apéndice se expone el caso de la ecuación general en dimensión cualquiera, que puede prescindirse de él inicialmente pero que se incluye para satisfacer la curiosidad de los lectores con más motivación matemática. Se cierra el capítulo 2 con una lista de problemas seleccionados.

Como referencias y lecturas complementarias pueden usarse los textos de *F. John, "Partial Differential Equations", Cuarta Edición, Springer Verlag 1979* y *R. Courant-D. Hilbert, "Methods of Mathematical Physics", Volumen I John Wiley Classics Edition 1989.*

2.1.- Ecuaciones quasi lineales de primer orden.

Consideraremos en esta sección ecuaciones de la forma

$$f_1(x_1, x_2, u)u_{x_1} + f_2(x_1, x_2, u)u_{x_2} = f(x_1, x_2, u) \tag{2.1.1}$$

Tales ecuaciones son llamadas *quasi lineales*, pues si bien dependen linealmente de las derivadas (u_{x_1}, u_{x_2}), es no lineal la depencia en u.

Ejemplos.

1.- La ecuación

$$f_1(x_1, x_2)u_{x_1} + f_2(x_1, x_2)u_{x_2} = f(x_1, x_2)u$$

es *lineal* pues además de ser quasi lineal la dependencia en u es lineal. A este caso podrán aplicarse en particular los resultados que se obtengan a continuación.

2.- La ecuación $u_t + a(u)u_x = 0$, donde las variables independientes son ahora t y x puede escribirse también como $u_t + A(u)_x = 0$ siendo $A(u) = \int_0^u a(s)ds$.

Empezaremos a precisar algunas condiciones sobre la ecuación (2.1.1); en primer lugar se supone que f_1, f_2, f están definidas en un abierto $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. Supondremos así mismo que:

1) $f_1, f_2, f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, es decir, son continuamente derivables en Ω.
2) $|f_1(x_1, x_2, u)| + |f_2(x_1, x_2, u)| > 0$, si $(x_1, x_2, u) \in \Omega$

La hipótesis 1) es una condición de regularidad suficiente; la hipótesis 2) garantiza que *hay ecuación en derivadas parciales* en todo Ω.

2.1.1. Definición.

Por **solución** *de la ecuación (2.1.1) entendemos una función, ϕ, definida en un abierto $G \subset \mathbf{R}^2$,*

$$\phi : G \longrightarrow \mathbf{R},$$

de manera que $\phi \in \mathcal{C}^1(G)$ y

(1) $(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) \in \Omega$.
(2) *Cualquiera que sea $(x_1, x_2) \in G$ se verifica*

$$f_1(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2))\phi_{x_1}(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2))\phi_{x_2}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)).$$

Es claro que el concepto de solución introducido por la definición anterior es de caracter local. En otras palabras, se considera como solución al par (G, ϕ), pudiendo ser G el entorno de un punto.

Esta idea trae aparejada una dificultad obvia y es saber cuando dos soluciones locales, ϕ_1 y ϕ_2 definidas en G_1 y G_2, respectivamente, pueden considerarse de alguna forma como un único objeto. La idea es que ϕ_1 y ϕ_2 coincidan en $G_1 \cap G_2$. Podemos interpretar de esta manera que ϕ_1 y ϕ_2 son restricciones de una misma solución a abiertos más pequeños. Por tanto damos la definición

2.1.2. Definición.
Entenderemos que (G_1, ϕ_1), (G_2, ϕ_2), *son una misma solución de (2.1.1) si se verifica que*

$$\phi_1|_{G_1 \cap G_2} = \phi_2|_{G_1 \cap G_2}$$

Recurriremos al significado geométrico de la ecuación para explorar como construir soluciones. Como resultado de este estudio geométrico apareceran los datos que son admisibles para plantearnos un problema de *valores iniciales*.

Supongamos una solución local de (2.1.1),

$$\phi : G \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R},$$

y sea su gráfica

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) \quad | \quad (x_1, x_2) \in G\}.$$

El vector normal a Σ es $\mathbf{n} = (\phi_{x_1}, \phi_{x_2}, -1)$. Si consideramos el campo dado por los coeficientes de la ecuación, es decir, $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f)$, que está definido en Ω, se tiene que el ser ϕ solución implica que

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{F} \rangle = 0 \quad \text{en} \quad \Sigma$$

En otras palabras $\mathbf{F}$ es tangente a Σ en todos sus puntos.

Por tanto, parece natural intentar construir las superficies solución o gráficas de soluciones, a partir de las curvas de campo asociadas al campo $\mathbf{F}$, es decir, las curvas tangentes a $\mathbf{F}$ en cada punto. Evidentemente hay que precisar como generar superficies a partir de curvas, pero lo que es claro, es que las curvas tangentes a $\mathbf{F}$ son las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomo siguiente:

$$\text{(2.1.2}a\text{)} \qquad \begin{cases} x_1'(t) & = f_1(x_1, x_2, u) \\ x_2'(t) & = f_2(x_1, x_2, u) \\ u'(t) & = f(x_1, x_2, u) \end{cases}$$

A (2.1.2a) se le llama *sistema característico* de la ecuación (2.1.1). Las gráficas en $\mathbf{R}^3$ de las soluciones de (2.1.2a) se llaman *curvas características*.

Teniendo en cuenta que suponemos $f_1, f_2, f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, para cada dato inicial

$$\text{(2.1.2}b\text{)} \qquad (x_1(0), x_2(0), u(0)) = (\xi_1^0, \xi_2^0, \eta^0) \in \Omega$$

el problema de Cauchy planteado por (2.1.2a) y (2.1.2b) tiene solución local única en virtud del teorema de existencia de Picard.

Además, la dependencia de las soluciones con respecto a los datos iniciales es diferenciable bajo nuestras hipótesis. Este resultado se conoce habitualmente como teorema de Peano.

El lector puede encontrar los detalles sobre los resultados anteriores en las referencias dadas en la sección 1.1 o en *M. Guzmán, "Ecuaciones Diferenciales Ordinarias", Editorial Alhambra 1975.*

Precisamos a continuación qué entendemos por *generar* una superficie a partir de las curvas características.

Si fijamos una curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^3$ regular, $\gamma \in \mathcal{C}^1([0,1])$, y cuyas coordenadas son

$$\gamma(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)),$$

podemos considerar la familia uniparamétrica de curvas soluciones de (2.1.2a) verificando para cada s el dato inicial

$$(x_1(0), x_2(0), u(0)) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)),$$

que denotaremos por

$$\Gamma(t,s) = (X_1(t,s), X_2(t,s), Z(t,s)) \tag{2.1.3}$$

Para s_0 fijo el vector tangente a $\Gamma(t,s_0)$ es $\Gamma_t(t,s_0)$ y por tanto viene dado por el segundo término del sistema característico (2.1.2a), es decir, abreviadamente,

$$\Gamma_t(t,s_0) \equiv \mathbf{F}(\Gamma(t,s_0)) \equiv (f_1(\Gamma(t,s_0), f_2(\Gamma(t,s_0)), f(\Gamma(t,s_0))$$

Por otra parte para $t = 0$ tenemos que $\Gamma(0,s) = \gamma(s)$ y así el vector tangente es

$$\gamma'(s) = (\alpha_1'(s), \alpha_2'(s), \beta'(s))$$

En consecuencia para que $\Gamma(t,s)$ sea la parametrización de una superficie regular, es decir, con plano tangente en cada punto y que éste varíe con continuidad de punto a punto, necesitamos que, al menos sobre la curva inicial, los dos vectores tangentes calculados sean linealmente independientes. Algebraicamente esto quiere decir que el rango de la matriz formada por las coordenadas de ambos vectores sea exactamente dos, es decir,

$$\text{rango}\begin{pmatrix} f_1(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) & \alpha_1'(s) \\ f_2(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) & \alpha_2'(s) \\ f(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) & \beta'(s) \end{pmatrix} = 2 \tag{2.1.4}$$

Si admitimos un argumento de continuidad basado en los citados resultados de ecuaciones diferenciales ordinarias, tenemos la forma de generar soluciones paramétricamente, a costa de suponer la condición (2.1.4) sobre la curva γ.

Nos referiremos a la condición (2.1.4) como *condición de transversalidad* de la curva γ y el campo que define la ecuación (2.1.1) o, si se prefiere, al sistema característico.

La mayor dificultad que habremos de resolver es probar que las funciones así obtenidas *definen* una solución de (2.1.1). Para ser más precisos, si pudiesemos probar que la condición (2.1.4) implica que

$$\begin{cases} x_1 = & X_1(t,s) \\ x_2 = & X_2(t,s) \end{cases}$$

tiene inversa local,

$$\begin{cases} s = & S(x_1,x_2) \\ t = & T(x_1,x_2) \end{cases}$$

todo quedaría reducido a establecer que

$$u = Z(T(x_1,x_2), S(x_1,x_2)) = \phi(x_1,x_2)$$

es una solución de (2.1.1). Además deberemos establecer si esta es la única solución con el *dato* γ.

Antes de hacer un planteamiento formal de las anteriores ideas, las vamos a ensayar en un ejemplo que nos permita hacer todos los cálculos explícita y sencillamente. Seguro que de esta manera entenderemos mejor lo que hemos razonado heurísticamente.

Ejemplo 1.

Consideramos la ecuación

$$a_1 u_{x_1} + a_2 u_{x_2} - b = 0$$

donde $a_1, a_2, b \in \mathbf{R}$ y $|a_1| + |a_2| > 0$. Como se ve se trata de una ecuación lineal.

Evidentemente las curvas características son las rectas con vector de dirección (a_1, a_2, b), es decir,

$$\begin{cases} x_1(t) & = a_1 t + \xi_1^0 \\ x_2(t) & = a_2 t + \xi_2^0 \\ u(t) & = bt + \eta^0. \end{cases}$$

Tomando una curva $\gamma(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s))$, transversal al vector (a_1, a_2, b),

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ \alpha_1'(s) & \alpha_2'(s) \end{pmatrix} \neq 0,$$

entonces,

$$\Gamma(t,s) = (a_1 t + \alpha_1(s), a_2 t + \alpha_2(s), bt + \beta(s)) \tag{2.1.5}$$

es la ecuación paramétrica de un cilindro de generatrices paralelas al vector (a_1, a_2, b).

Observación. *Un caso particular interesante, es cuando se tiene la ecuación*

$$u_t + cu_x = 0$$

y se toma el dato $u(0,x) = \phi(x)$. La solución resulta ser $\phi(x - ct)$ que es lo que cuando se estudie la ecuación de ondas se llamará una onda plana.

Tomemos en particular la curva $\gamma(s) = (a_2 s, -a_1 s, s^2)$. De acuerdo a la expresión (2.1.5) se tiene, resolviendo el sistema lineal que resulta,

$$\begin{cases} t &= \dfrac{a_1x_1 + a_2x_2}{a_1^2 + a_2^2}, \\ s &= \dfrac{a_2x_1 - a_1x_2}{a_1^2 + a_2^2}. \end{cases}$$

Sustituyendo en $Z(t,s) = bt + s^2$, resulta

$$u(x_1, x_2) = b(\frac{a_1x_1 + a_2x_2}{a_1^2 + a_2^2}) + (\frac{a_2x_1 - a_1x_2}{a_1^2 + a_2^2})^2$$

que directamente se puede comprobar es solución de la ecuación.

También se verifica que $u(a_2 s, -a_1 s) = s^2$; es decir, hemos determinado una superficie solución de la ecuación que sobre la curva plana

$$\gamma^*(s) = (a_2 s, -a_1 s)$$

toma el valor s^2.

En el ejemplo 1 el resultado se ha conseguido porque hemos podido *invertir* explícitamente (t,s) en términos de (x_1, x_2) al tratarse de una expresión lineal.

En general el resultado de inversión lo dará el teorema de la función inversa. Remitimos al lector, por ejemplo, al texto de *J.E. Marsden, "Elementary Classical Analysis", W.H. Freeman Co. 1974*, para todos los detalles sobre este resultado básico del Análisis.

Precisamos a continuación las hipótesis que hemos conjeturado:

I) Hipótesis sobre la ecuación.

Las condiciones que se suponen sobre la ecuación (2.1.1), es decir,

$$L[u] \equiv f_1(x_1, x_2, u)u_{x_1} + f_2(x_1, x_2, u)u_{x_2} - f(x_1, x_2, u) = 0,$$

son

(1) $f_1, f_2, f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, siendo $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un dominio abierto, es decir, un subconjunto abierto y conexo.

(2) $|f_1| + |f_2| > 0$, para cada $(x_1, x_2, u) \in \Omega$.

II) Hipótesis sobre la curva dato.

Sobre la curva dato se hacen las hipótesis siguientes:

(1) $\gamma \in \mathcal{C}^1(I)$, donde $I \subset \mathbf{R}$ es un intervalo, y $\gamma(s) \in \Omega$ para cada $s \in I$ que lo que quiere decir es que se trata de una aplicación

$$\gamma : I \longrightarrow \Omega \subset \mathbf{R}^3$$

(2) $|\alpha_1'(s)| + |\alpha_2'(s)| > 0$ sobre el intervalo I. Es claro que esta condición establece que en ningún punto la curva tiene tangente paralela al eje Ou.

(3) La *condición de transversalidad* (2.1.4) se postula también sobre las dos primeras coordenadas, es decir se supone que

$$\det \begin{pmatrix} f_1(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) & \alpha_1'(s) \\ f_2(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) & \alpha_2'(s) \end{pmatrix} \neq 0$$

para cada $s \in I$.

Es claro que las hipótesis 2) y 3) se pueden hacer sobre otro par de coordenadas, entonces se definirá la coordenada restante como función de ellas.

Planteamiento del problema de Cauchy. El problema de Cauchy, o problema de valores iniciales, se plantea en los siguientes términos

Problema.

Dada la ecuación

$$L[u] \equiv f_1(x_1, x_2, u)u_{x_1} + f_2(x_1, x_2, u)u_{x_2} - f(x_1, x_2, u) = 0$$

y la curva dato

$$\gamma(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)),$$

encontrar una función

$$\phi : G \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R},$$

$\phi \in \mathcal{C}^1(G)$, *tal que:*

i) $(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) \in \Omega$ *si* $(x_1, x_2) \in G$,

ii) ϕ *verifica la ecuación, en el sentido que si* $(x_1, x_2) \in G$ *entonces*

$$f_1(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2))\phi_{x_1}(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2))\phi_{x_2}(x_1, x_2) = \\ = f(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2))$$

iii) $\phi(\alpha_1(s), \alpha_2(s)) = \beta(s)$ *para* $s \in I$

La expresión *problema de valores iniciales* queda justificada porque buscamos una función solución de la ecuación tal que sobre la curva plana $(\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ tome el valor $\beta(s)$. Es tanto como decir que la superficie solución (gráfica de la función solución) contiene la curva tridimensional γ.

Como quedó dicho anteriormente, el concepto de solución que usamos es de caracter local, es decir, se considera el par (G, ϕ). Por esta razón cuando se hable de unicidad, habrá que entenderlo como se precisa en la definición (2.1.2).

2.1.3. Teorema.
Consideremos el problema de Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, u)u_{x_1} + f_2(x_1, x_2, u)u_{x_2} - f(x_1, x_2, u) = 0 \\ \hfill u(\alpha_1(s), \alpha_2(s)) = \beta(s), \end{cases}$$

donde la ecuación y el dato verifican las hipótesis I) y II) anteriores.

Entonces, el problema (P) tiene una única solución local u*, con derivadas primeras continuas.*

Demostración.

1.- Existencia. Comenzamos probando la existencia de al menos una solución local regular, siguiendo los razonamientos geométricos anteriores. Para ello, consideramos el problema de Cauchy para el *sistema característico*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, u) \\ \dfrac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, u) \\ \dfrac{du}{dt} &= f(x_1, x_2, u), \end{cases}$$

con dato inicial para s fijo,

$$\begin{cases} x_1(0) = & \alpha_1(s) \\ x_2(0) = & \alpha_2(s) \\ u(0) = & \beta(s). \end{cases}$$

El teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias establece, que el problema de Cauchy anterior tiene una única solución,

$$(2.1.6) \qquad \begin{cases} x_1 = & \phi_1(t, \alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) \equiv X_1(t, s) \\ x_2 = & \phi_2(t, \alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) \equiv X_2(t, s) \\ u = & \phi_3(t, \alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) \equiv Z(t, s). \end{cases}$$

Además en un entorno del punto $(0, s)$ se tiene que la función vectorial,

$$(t, s) \longrightarrow (X_1(t, s), X_2(t, s), Z(t, s))$$

definida por (2.1.6) es continuamente derivable, en virtud del teorema de Peano sobre la regularidad de la solución de una ecuación diferencial ordinaria respecto a los datos iniciales.

De esta manera la función vectorial (2.1.6) define paramétricamente una superficie $\mathcal{C}^1(G(0, s))$ donde $G(0, s)$ es un entorno del punto $(0, s)$, pues la condición de transversalidad se escribe como sigue

$$\begin{vmatrix} X_{1s}(0, s) & X_{2s}(0, s) \\ X_{1t}(0, s) & X_{2t}(0, s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1'(s) & \alpha_2'(s) \\ f_1(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) & f_2(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) \end{vmatrix} \neq 0.$$

El teorema de la función inversa implica, entonces, que en un entorno de $(0, s)$ la función, $(X_1(t, s), X_2(t, s))$ tiene inversa continuamente derivable,

$$\begin{cases} t = & T(x_1, x_2) \\ s = & S(x_1, x_2), \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} x_1 = & X_1(T(x_1, x_2), S(x_1, x_2)) \\ x_2 = & X_2(T(x_1, x_2), S(x_1, x_2)) \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} 0 = & T(\alpha_1(s), \alpha_2(s)) \\ s = & S(\alpha_1(s), \alpha_2(s)). \end{cases}$$

Definimos

$$u(x_1, x_2) = Z(T(x_1, x_2), S(x_1, x_2))$$

y probaremos que es solución del problema de Cauchy.

En efecto,

$$\begin{aligned} f_1 u_{x_1} + f_2 u_{x_2} &= f_1(Z_t T_{x_1} + Z_s S_{x_1}) + f_2(Z_t T_{x_2} + Z_s S_{x_2}) = \\ &= Z_t(f_1 T_{x_1} + f_2 T_{x_2}) + Z_s(f_1 S_{x_1} + f_2 S_{x_2}) \\ &= Z_t(X_{1t} T_{x_1} + X_{2t} T_{x_2}) + Z_s(X_{1t} S_{x_1} + X_{2t} S_{x_2}) \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

donde se ha tenido en cuenta que (X_1, X_2) es solución del sistema característico. De otra parte, se observa que

$$X_{1t} T_{x_1} + X_{2t} T_{x_2} = 1$$

$$X_{1t} S_{x_1} + X_{2t} S_{x_2} = 0$$

pues son un término de la diagonal principal y otro fuera de ella respectivamente, de la matriz producto de las matrices jacobianas de (X_1, X_2) y (T, S) que son funciones inversas. Si además se tiene en cuenta que al ser Z la tercera componente del sistema característico, $Z_t = f$, (2.1.7) se convierte en

$$f_1 u_{x_1} + f_2 u_{x_2} = f,$$

es decir, u es solución de la ecuación. Que verifica el dato se comprueba en la siguiente cadena de identidades

$$\begin{aligned} u(\alpha_1(s), \alpha_2(s)) =& Z(T(\alpha_1(s), \alpha_2(s)), S(\alpha_1(s), \alpha_2(s))) = \\ &= Z(0, s) = \beta(s) \end{aligned}$$

2.- Unicidad. La unicidad resulta como consecuencia del siguiente resultado.

2.1.4. Lema.
Sea $S = \{(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) \in G \times \mathbf{R}\}$ *una superficie solución y* P *un punto de* S. *Si* $\Gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), z(t))$ *es la característica tal que* $P = \Gamma(0)$, *entonces se verifica que* $\Gamma(t) \in S$ *para cada* t *tal que* $(x_1(t), x_2(t)) \in G$.

Demostración.
Basta considerar la función $U(t) = z(t) - \phi(x_1(t), x_2(t))$ y probar que puesto que $U(0) = 0$, se verifica $U(t) \equiv 0$. Pero se tiene tras derivar que

$$\begin{aligned} U'(t) &= f(x_1(t), x_2(t), z(t)) - \phi_{x_1}(x_1(t), x_2(t)) x_1'(t) - \phi_{x_2}(x_1(t), x_2(t)) x_2'(t) \\ &= f(x_1(t), x_2(t), U(t) + \phi(x_1(t), x_2(t))) - \\ &- \phi_{x_1}(x_1(t), x_2(t)) f_1(x_1(t), x_2(t), U(t) + \phi(x_1(t), x_2(t))) - \\ &- \phi_{x_2}(x_1(t), x_2(t)) f_1(x_1(t), x_2(t), U(t) + \phi(x_1(t), x_2(t))) \equiv \\ &\equiv F(t, U(t)), \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

ya que, evidentemente, $z(t) = U(t) + \phi(x_1(t), x_2(t))$.
De (2.1.8) se tiene que U verifica

$$(PO) \qquad \begin{cases} U'(t) &= F(t, U(t)) \\ U(0) &= 0. \end{cases}$$

Como ϕ es una solución de la ecuación de (2.1.1), se comprueba que la función $V(t) \equiv 0$ es solución de (PO); basta sustituir la función nula en (2.1.8).
La unicidad de solución para ecuaciones diferenciales ordinarias implica que necesariamente, entonces, $U(t) \equiv 0$. $\square$

Una lectura adecuada del lema anterior establece la unicidad para el problema de Cauchy de la ecuación de primer orden *quasi lineal* que estamos estudiando. A saber, la existencia se obtiene construyendo la solución con características y el lema (2.1.4) prueba que si una característica tiene un punto en común con una solución, los tiene todos.

Podemos resumir el argumento de unicidad de la manera siguiente:

Si existiesen dos soluciones distintas para el dato dado, cada característica pasando por cada punto de la curva dato debería estar contenida en ambas. Lo cual es una contradicción. □

Al igual que para las ecuaciones diferenciales ordinarias, se tiene un resultado de dependencia continua respecto a los datos. Pasamos a precisar en que sentido entendemos dicha continuidad y a probar el resultado.

Supongamos las curvas dato

$$\begin{cases} \gamma(s) = & (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) \\ \bar{\gamma}(s) = & (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \bar{\beta}(s)), \end{cases}$$

donde $\beta(s)$ y $\bar{\beta}(s)$, coinciden fuera de un intervalo compacto.

Sean $\Gamma(t,s)$ y $\bar{\Gamma}(t,s)$ las respectivas soluciones en forma paramétrica.

Entonces podemos escribir fijado s

$$||\Gamma(t,s) - \bar{\Gamma}(t,s)|| \leq$$

$$\leq |\beta(s) - \bar{\beta}(s)| + \int_0^t \{\sum_1^2 |f_i(\Gamma(r,s)) - f_i(\bar{\Gamma}(r,s))| + |f(\Gamma(r,s)) - f(\bar{\Gamma}(r,s))|\} dr.$$

Por las hipótesis de regularidad sobre f_1, f_2 y f, aplicando el teorema del valor medio sobre una bola de $\mathbf{R}^3$ que contenga los puntos donde las curvas dato no coinciden, existe una constante $K > 0$ tal que

$$|f(\Gamma(t,s)) - f(\bar{\Gamma}(t,s))| \leq K||\Gamma(t,s) - \bar{\Gamma}(t,s)||,$$

$$|f_i(\Gamma(t,s)) - f_i(\bar{\Gamma}(t,s))| \leq K||\Gamma(t,s) - \bar{\Gamma}(t,s)|| \quad \text{si} \quad i = 1, 2.$$

Por tanto, resulta

$$||\Gamma(t,s) - \bar{\Gamma}(t,s)|| \leq |\beta(s) - \bar{\beta}(s)| + K \int_0^t ||\Gamma(u,s) - \bar{\Gamma}(u,s)|| du,$$

y por la desigualdad de Gronwall concluimos que

$$||\Gamma(t,s) - \bar{\Gamma}(t,s)|| \leq |\beta(s) - \bar{\beta}(s)| e^{Kt},$$

lo que prueba la continuidad en el sentido de la convergencia uniforme sobre compactos. El lector puede consultar cualquiera de los libros de ecuaciones diferenciales ordinarias citados en las referencias para encontrar una prueba de la desigualdad de Gronwall, aunque le sugerimos que intente demostrarla por sí mismo en este caso sencillo.

El teorema de existencia y unicidad que acabamos de probar es de caracter local. La pregunta inmediata es si estos resultados se pueden globalizar. La respuesta es negativa si el concepto de solución es el clásico, es decir, de una función con derivadas continuas y que sustituida ella y sus derivadas en la ecuación, la verifican identicamente.

El ejemplo que sigue es paradigmático a este respecto. Se trata de una ecuación de Euler en una dimensión.

Ejemplo 2.

Consideremos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + uu_x &= 0, \\ u(x,0) &= h(x). \end{cases}$$

El sistema característico es:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} &= u \\ \dfrac{dt}{d\tau} &= 1 \\ \dfrac{du}{d\tau} &= 0; \end{cases}$$

y el dato parametrizado

$$\begin{cases} \alpha_1(s) &= s \\ \alpha_2(s) &= 0 \\ \beta(s) &= h(s). \end{cases}$$

Por tanto tras integrar el sistema característico se tiene que la solución parametrizada es

$$\begin{cases} X(\tau,s) = & s + u\tau \\ T(\tau,s) = & \tau \\ Z(\tau,s) = & h(s). \end{cases} \tag{2.1.9}$$

Si se eliminan s y τ resulta

$$u = h(x - ut),$$

que es la solución definida implícitamente.

En el plano xt las dos primeras componentes de la curva característica que pasa por el punto $(s, 0, h(s))$ definen la recta

$$x = s + h(s)t.$$

Sobre dicha recta la tercera componente es constante y su valor es $Z(\tau, s) = h(s)$, de acuerdo con (2.1.9). Si se sigue la pauta de la prueba del teorema, la solución sobre tal recta tiene el valor de Z, es decir, también, $u = h(s)$.

Para dos valores $s_1 \neq s_2$ las correspondientes rectas, proyecciones de las características sobre el plano xt se cortan en un punto P dado por el valor del parámetro

$$t_0 = -\left(\frac{s_2 - s_1}{h(s_2) - h(s_1)}\right),$$

si este está bien definido.

Según la observación anterior, en dicho punto, de estar definida la solución como una función, debería tomar a la vez los valores $h(s_1)$ y $h(s_2)$. Es decir, es en general imposible definir globalmente una función solución que sea derivable con continuidad.

Con el siguiente cálculo quedará claro qué tipo de singularidad se tiene. Estudiando la variación de u_x a lo largo de una recta característica se tiene

$$u_x = h'(s)s_x,$$

pero

$$s_x = [x_s]^{-1} = \frac{1}{1 + h'(s)\tau}.$$

Por tanto si $h'(s) < 0$ tenemos que para $\tau \to t_1 = -\dfrac{1}{h'(s)}$ se verifica que $u_x \to \infty$. Entonces en tales puntos la función solución deja de ser derivable con continuidad.

Si se recuerda la obtención de la ecuación en §1.7, puede observarse que hay una expresión integral que no requiere la regularidad de la solución y que es equivalente a la ecuación puntual cuando la solución es regular. Para entenderlo mejor, escribamos la ecuación como la divergencia de un campo, es decir,

$$A(u)_t + B(u)_x = 0, \tag{2.1.10}$$

o bien,

$$A'(u)u_t + B'(u)u_x = 0$$

y para que sea equivalente a la ecuación $u_t + uu_x = 0$ debe verificarse que

$$B'(u) = uA'(u).$$

El lector habrá comprendido que lo que hacemos es multiplicar la equación por $A'(u)$, y calcular una primitiva de $A'(u)$ y de $uA'(u)$, a la cual llamamos B.

Pero ahora tenemos que si a, b y t son arbitrarios, por integración de (2.1.10),

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\int_a^b A(u(x,t))dx\right) + (B(u(b,t)) - B(u(a,t)), \tag{2.1.11}$$

que es lo que se conoce como una *ley de conservación*.

Si suponemos que $u \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$, entonces (2.1.11) implica que u verifica la ecuación en derivadas parciales de partida, es decir,

$$u_t + uu_x = 0.$$

Pero observamos que (2.1.11) es válido para u con menos regularidad, por eso (2.1.11) puede servir para definir lo que es una *solución débil* de la ecuación (2.1.10).

Sea u una solución débil de la ecuación (2.1.10), que es regular excepto en una curva

$$x = \sigma(t),$$

a través de la cual la solución tiene un salto finito.

Suponemos que $u^+ = \lim_{x \to \sigma(t)^+} u(x,t)$ y $u^- = \lim_{x \to \sigma(t)^-} u(x,t)$ son finitos, entonces, si $a < \sigma(t) < b$, (2.1.11) podemos escribirlo como

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\int_a^{\sigma(t)} A(u(x,t))dx + \int_{\sigma(t)}^b A(u(x,t))dx\right) + (B(u(b,t)) - B(u(a,t)),$$

de donde efectuando los cálculos se tiene

$$0 = \frac{d\sigma}{dt}(t)(A(u^-) - A(u^+)) + B(u(b,t)) - B(u(a,t)) + \left(\int_a^{\sigma(t)} A_t(u)dx + \int_{\sigma(t)}^b A_t(u)dx\right) =$$
$$= \frac{d\sigma}{dt}(t)(A(u^-) - A(u^+)) + B(u(b,t)) - B(u(a,t)) - \left(\int_a^{\sigma(t)} B_x(u)dx + \int_{\sigma(t)}^b B_x(u)dx\right).$$

Por tanto, efectuando las dos últimas integraciones, tenemos

$$\frac{d\sigma}{dt}(t) = \frac{B(u^+) - B(u^-)}{A(u^+) - A(u^-)}. \tag{2.1.13}$$

que da la velocidad de propagación de la discontinuidad en términos de la variación de A y B en el salto de u. La condición (2.1.13) se conoce como *condición de choque*.

Lo hecho para nuestro ejemplo tiene validez en casos muy generales que quedan fuera del alcance de este texto. No obstante el siguiente ejemplo puede ser ilustrativo pues pone de manifiesto como puede tenerse solución débil global *no regular*.

Ejemplo 3.

Consideramos el Problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + uu_x & = 0 \\ u(x,0) & = h(x), \end{cases}$$

con

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1-x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 \leq x. \end{cases}$$

Podemos encontrar solución local con derivadas primeras continuas si $t \leq 1$. En $t > 1$ las características se cortan y no se puede tener solución regular. Podemos definir para $t \geq 1$

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < \dfrac{1+t}{2} \\ 0 & \text{si} \quad x > \dfrac{1+t}{2}; \end{cases}$$

que es una solución débil, regular salvo en $x = \dfrac{1+t}{2}, \quad t > 1$. El salto es $s = \frac{1}{2}$.

Multiplicando la ecuación (2.1.10) por una función $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ e integrando por partes, se obtiene

$$\int_{\mathbf{R}^2} (A(u)\phi_t + B(u)\phi_x) dxdt = 0. \tag{2.1.12}$$

Otra posibilidad de definir una *solución débil* de (2.1.10) es pedir que se verifique (2.1.12) para toda $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, que no depende de que u sea regular.

Este concepto de solución débil es el conocido como *solución en sentido de distribuciones*. Este contexto da gran fluidez de cálculo pero queda también para un estudio más avanzado del que aquí se pretende.

Debemos, sin embargo, reflexionar en el cálculo que hemos hecho. La solución en un sentido clásico, entendida como función derivable, puede existir sólo localmente. Entonces se extiende el concepto de solución a costa de tener comportamientos más complicados.

2.2.- Ecuación general de primer orden

Sea la ecuación

$$F(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}) = 0, \tag{2.2.1}$$

donde se supone que $F \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, siendo $\Omega \subset \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^2$ un dominio abierto, y tal que es aplicable el teorema de la función implícita, respecto a u_{x_1}, o bién respecto a u_{x_2}.

Es clásico notar $p = u_{x_1}$ y $q = u_{x_2}$, de manera que la ecuación se escribe entonces como

$$F(x_1, x_2, u, p, q) = 0$$

y la condición para que sea aplicable el teorema de la función implícita resulta entonces

$$|F_p| + |F_q| > 0, \quad \text{en todo punto} \quad (x_1, x_2, u, p, q) \in \Omega.$$

Notaremos por Ω^* la proyección de Ω sobre $\mathbf{R}^3$, espacio de las variables (x_1, x_2, u). De esta forma podemos imaginar Ω como formado por puntos de Ω^* a los cuales se les asignan vectores de la forma $(p, q, -1)$.

2.2.1. Definición.
Diremos que la función ϕ definida en un abierto $G \subset \mathbf{R}^2$ es una solución de la ecuación (2.2.1) si se verifican:
(1) $\phi \in \mathcal{C}^2(G)$,
(2) $F(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), \phi_{x_1}(x_1, x_2), \phi_{x_2}(x_1, x_2)) = 0$ *para cada* $(x_1, x_2) \in G$.

La condición de regularidad que pedimos a ϕ es consecuencia de la regularidad exigida a F, que está motivada únicamente para simplificar los argumentos en la demostración de los teoremas de existencia y unicidad.

La condición 2) supone en particular que

$$(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), \phi_{x_1}(x_1, x_2), \phi_{x_2}(x_1, x_2)) \in \Omega.$$

Es bastante sorprendente que para la ecuación general también se obtenga el resultado de existencia y unicidad local, mediante la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, como ocurría en el caso más sencillo de la ecuación quasi lineal.

También en este caso va a ser transcendental la interpretación geométrica que podemos hacer de la ecuación en derivadas parciales (2.2.1). La geometría es un poco más complicada en el caso general, pero tan ilustrativa como en el caso quasi lineal. ¿Qué significa la ecuación geométricamente? Fijemos un punto $(x_1^0, x_2^0, u^0) \in \Omega^*$ y supongamos que ϕ es una solución de la ecuación (2.2.1) definida en cierto abierto G, tal que $u^0 = \phi(x_1^0, x_2^0)$. Si $(p, q, -1)$ designa al vector normal a la gráfica de ϕ en el punto (x_1^0, x_2^0, u^0), necesariamente ha de verificarse que

$$F(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q) = 0.$$

Por tanto, para encontrar superficies solución que pasen por un punto hay que buscar entre aquellas cuyo vector normal tiene sus dos primeras coordenadas satisfaciendo la ecuación no lineal $F(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q) = 0$. En otras palabras, fijado un punto $(x_1^0, x_2^0, u^0) \in \Omega^*$, la ecuación en derivadas parciales (2.2.1) seleccciona los parámetros

p y q, de forma que $(p,q,-1)$ es el vector normal a un plano pasando por el punto fijado y que es el candidato a ser un plano tangente a una superficie solución.

La envolvente de esta familia de planos es un cono, el cual recibe el nombre de *cono de Monge* en honor del matemático francés G. Monge, quien introdujo este método para abordar el problema. Así pues, mientras que en el caso quasi lineal la ecuación asigna a cada punto un vector, en el caso general asigna a cada punto el cono de Monge correspondiente. Como se ve, la geometría es en efecto más complicada.

Determinar el cono de Monge que la ecuación asigna a cada punto es nuestra tarea inmediata. Sea $P^0 = (x_1^0, x_2^0, u^0) \in \Omega^*$ un punto fijado; el cono de Monge es la envolvente de la familia de planos

$$\left\{ \begin{array}{l} (X_1 - x_1^0)p + (X_2 - x_2^0)q = U - u^0 \\ F(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q) = 0. \end{array} \right. \tag{2.2.2}$$

Como por hipótesis $|F_p| + |F_q| > 0$, podemos suponer que, por ejemplo, $F_p \neq 0$ y, por tanto, que $F(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q) = 0$ define implícitamente a p como

$$p = f(x_1^0, x_2^0, u^0, q). \tag{2.2.3}$$

Es decir, en realidad (2.2.2) es una familia uniparamétrica de planos. Como consecuencia las generatrices del cono de Monge en el punto P^0 se obtienen como la intersección de los planos en (2.2.2) con

$$0 = (X_1 - x_1^0)\frac{dp}{dq} + (X_2 - x_2^0)$$

Pero derivando implícitamente con P^0 fijo, tenemos que

$$F_p \frac{dp}{dq} + F_q = 0$$

por lo que, tras un cálculo algebraico elemental, las generatrices del cono de Monge escritas en forma continua son

$$\left\{ \begin{array}{ll} F(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q) & = 0 \\ \dfrac{X_1 - x_1^0}{F_p(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q)} & = \dfrac{X_2 - x_2^0}{F_q(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q)} = \dfrac{U - u^0}{pF_p(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q) + qF_q(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q)}. \end{array} \right.$$

Llamaremos *curvas de Monge* a las que en cada punto son tangentes al cono de Monge, es decir, son las soluciones del sistema diferencial ordinario

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dx_1}{dt} & = F_p(x_1, x_2, u, p, q) \\ \dfrac{dx_2}{dt} & = F_q(x_1, x_2, u, p, q) \\ \dfrac{du}{dt} & = pF_p(x_1, x_2, u, p, q) + qF_q(x_1, x_2, u, p, q) \\ & F(x_1, x_2, u, p, q) = 0. \end{array} \right.$$

Es claro que, en general, se tiene un parámetro libre, o dicho de otra forma por cada punto de Ω^* pasa una familia uniparamétrica de curvas de Monge. Ahora bien, si una curva de Monge,

$$(x_1(t), x_2(t), u(t)),$$

se supone situada sobre una superficie solución $u = \phi(x_1, x_2)$ entonces la normal a la superficie a lo largo de la curva ha de variar siguiendo las ecuaciones,

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} &= p_{x_1}\dfrac{dx_1}{dt} + p_{x_2}\dfrac{dx_2}{dt} = p_{x_1}F_p + p_{x_2}F_q \\ \dfrac{dq}{dt} &= q_{x_1}\dfrac{dx_1}{dt} + q_{x_2}\dfrac{dx_2}{dt} = q_{x_1}F_p + q_{x_2}F_q, \end{cases}$$

donde los valores de p_{x_1}, p_{x_2}, q_{x_1} y q_{x_2} se calculan derivando en la ecuación respecto a x_1 y x_2. Más precisamente, derivando se tienen las dos ecuaciones siguientes

$$\begin{cases} F_{x_1} + pF_u + F_p p_{x_1} + F_q q_{x_1} &= 0 \\ F_{x_2} + qF_u + F_p p_{x_2} + F_q q_{x_2} &= 0, \end{cases}$$

y por hipótesis ϕ tienen derivadas segundas continuas, entonces se tiene que $p_{x_2} = q_{x_1}$, por el teorema de Schwartz sobre la igualdad de las *derivadas cruzadas*. Por tanto, despejando, resultan las ecuaciones que deben satisfacer p y q a lo largo de la curva de Monge situada sobre la superficie solución y que son

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} &= -F_{x_1} - pF_u \\ \dfrac{dq}{dt} &= -F_{x_2} - qF_u. \end{cases}$$

De esta manera a la solución $u = \phi(x_1, x_2)$ le hemos asociado una familia de curvas de Monge situadas sobre su gráfica tales que los parámetros p y q satisfacen el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} &= F_p(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q) \\ \dfrac{dx_2}{dt} &= F_q(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q) \\ \dfrac{du}{dt} &= pF_p(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q) + qF_q(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q) \\ \dfrac{dp}{dt} &= -F_{x_1} - pF_u \\ \dfrac{dq}{dt} &= -F_{x_2} - qF_u \\ & F(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q) = 0. \end{cases}$$

Las cinco ecuaciones diferenciales se llaman *sistema característico* relativo a la ecuación en derivadas parciales de primer orden.

Parece natural intentar construir soluciones de la ecuación en derivadas parciales por integración del sistema característico con datos iniciales verificando

$$F(x_1^0, x_2^0, u^0, p^0, q^0) = 0.$$

La primera dificultad es que en apariencia el sistema formado por las cinco ecuaciones diferenciales y la condición sobre los datos es sobredeterminado. A este respecto observemos que si se tiene una solución del sistema característico,

$$(x_1(t), x_2(t), u(t), p(t), q(t)),$$

y llamando

$$g(t) = F(x_1(t), x_2(t), u(t), p(t), q(t)),$$

se verifica

$$\begin{aligned} g'(t) &= F_{x_1}\frac{dx_1}{dt} + F_{x_2}\frac{dx_2}{dt} + F_u\frac{du}{dt} + F_p\frac{dp}{dt} + F_q\frac{dq}{dt} = \\ &= F_{x_1}F_p + F_{x_2}F_q + F_u(pF_p + qF_q) + F_p(-F_{x_1} - pF_u) + F_q(-F_{x_2} - qF_u) \equiv 0 \end{aligned}$$

Es decir, la función F es constante sobre las características, de forma que si en $t = 0$ se verifica que $0 = F(x_1^0, x_2^0, u^0, p^0, q^0)$, entonces se verifica

$$0 = F(x_1(t), x_2(t), u(t), p(t), q(t)),$$

en todo $t \in I$, intervalo de definición de la característica. Esto se traduce en que la sexta condición es compatible con el sistema de ecuaciones diferenciales característico y, por tanto, que el problema es soluble.

Conviene ahora reflexionar sobre el significado geométrico del sistema característico y de sus soluciones.

Una solución del sistema característico debe entenderse como una curva en el espacio $\mathbf{R}^3$, $(x_1(t), x_2(t), u(t))$ y, a lo largo de ella, una familia de planos cuyo vector normal es $(p(t), q(t), -1)$. Observemos que

$$u'(t) = x_1'(t)p(t) + x_2'(t)q(t), \tag{2.2.4}$$

es decir, se trata de planos tangentes a la curva.

Para t_0 fijo el punto correspondiente, $(x_1^0, x_2^0, u^0, p^0, q^0)$, de la solución del sistema característico será llamado un *elemento de banda*, en el sentido que las dos últimas coordenadas son las componentes de un plano tangente. A las soluciones del sistema característico las llamaremos *bandas características* por verificar (2.2.4) y diremos que $(x_1(t), x_2(t), u(t))$ es la curva característica soporte.

El resultado que sigue establece que toda solución de la ecuación en derivadas parciales está engendrada por *bandas características*. Este resultado es en realidad un resultado de unicidad como veremos; además indica como deben de construirse las soluciones. En concreto establece que dada una solución de la ecuación en derivadas parciales, si tomamos un punto de su gráfica y el vector normal al plano tangente a ella en dicho punto, la banda característica con tales datos iniciales, verifica que su curva característica soporte, $(x_1(t), x_2(t), u(t))$, está contenida en la superficie solución para todo t, siendo además $(p(t), q(t), -1)$ el vector normal a la superficie solución en el punto $(x_1(t), x_2(t), u(t))$.

2.2.2. Lema.
Sea $(x_1(t), x_2(t), u(t), p(t), q(t))$ banda característica definida en el intervalo I y sea $u = \phi(x_1, x_2)$ solución de $F(x_1, x_2, u, p, q) = 0$. Si para algún t_0 se tiene que

$$(2.2.5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u(t_0) = \phi(x_1(t_0), x_2(t_0)) \\ p(t_0) = \phi_{x_1}(x_1(t_0), x_2(t_0)) \\ q(t_0) = \phi_{x_2}(x_1(t_0), x_2(t_0)), \end{array} \right.$$

entonces para cada $t \in I$ se verifica

$$(2.2.6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u(t) = \phi(x_1(t), x_2(t)) \\ p(t) = \phi_{x_1}(x_1(t), x_2(t)) \\ q(t) = \phi_{x_2}(x_1(t), x_2(t)). \end{array} \right.$$

Demostración.
Sea

$$(x_1^0, x_2^0, u^0, p^0, q^0) = (x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0), p(t_0), q(t_0)),$$

verificando la hipótesis (2.2.5). Consideramos las ecuaciones diferenciales

$$(2.2.7) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} x_1'(t) = & F_p(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), \phi_{x_1}(x_1, x_2), \phi_{x_2}(x_1, x_2)) \\ x_2'(t) = & F_q(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), \phi_{x_1}(x_1, x_2), \phi_{x_2}(x_1, x_2)), \end{array} \right.$$

que resultan de sustituir en las dos primeras ecuaciones del sistema característico la solución y sus derivadas parciales. Si consideramos el dato inicial

$$(x_1(t_0), x_2(t_0)) = (x_1^0, x_2^0)$$

el sistema (2.2.7) tiene una solución única, $(y_1(t), y_2(t))$, pues el sistema está en las hipótesis del teorema de existencia y unicidad de Picard por las condiciones exigidas a F. (Véanse las referencias sobre ecuaciones diferenciales ordinarias de la Bibliografía).

Si definimos $z(t) = \phi(y_1(t), y_2(t))$, tenemos que la curva $(y_1(t), y_2(t), z(t))$, está sobre la superficie solución. Además derivando se tiene que

$$
(2.2.8) \qquad \begin{cases} z'(t) = & \phi_{x_1}\dfrac{dy_1}{dt} + \phi_{x_2}\dfrac{dy_2}{dt} = \phi_{x_1}F_p + \phi_{x_2}F_q \\ \phi'_{x_1}(t) = & \phi_{x_1x_1}y'_1(t) + \phi_{x_2x_1}y'_2(t) = \phi_{x_1x_1}F_p + \phi_{x_2x_1}F_q \\ \phi'_{x_2}(t) = & \phi_{x_2x_1}y'_1(t) + \phi_{x_2x_2}y'_2(t) = \phi_{x_2x_1}F_p + \phi_{x_2x_2}F_q \end{cases}
$$

y donde $\phi(x_1^0, x_2^0) = u^0$, $\phi_{x_1}(x_1^0, x_2^0) = p^0$ y $\phi_{x_2}(x_1^0, x_2^0) = q^0$. Como $u = \phi(x_1, x_2)$ es solución también se verifica $F(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), \phi_{x_1}(x_1, x_2), \phi_{x_2}(x_1, x_2)) = 0$, derivando respecto a x_1 y a x_2 tenemos

$$
(2.2.9) \qquad \begin{cases} F_{x_1} + F_u\phi_{x_1} + F_p\phi_{x_1x_1} + F_q\phi_{x_2x_1} = 0 \\ F_{x_2} + F_u\phi_{x_2} + F_p\phi_{x_1x_2} + F_q\phi_{x_2x_2} = 0 \end{cases}
$$

De (2.2.9) obtenemos el segundo miembro de (2.2.8), es decir, las dos últimas ecuaciones de (2.2.8) se transforman en

$$
\begin{cases} \dfrac{d\phi_{x_1}}{dt} & = -\phi_{x_1}F_u - F_{x_1} \\ \dfrac{d\phi_{x_2}}{dt} & = -\phi_{x_2}F_u - F_{x_2}. \end{cases}
$$

En resumen, las funciones

$$
(y_1(t), y_2(t), z(t), \phi_{x_1}(y_1(t), y_2(t)), \phi_{x_2}(y_1(t), y_2(t)))
$$

son soluciones del sistema característico con el mismo dato inicial que satisface la banda característica considerada y

$$
F(y_1(t), y_2(t), z(t), \phi_{x_1}(y_1(t), y_2(t)), \phi_{x_2}(y_1(t), y_2(t))) = 0.
$$

Por el teorema de Picard aplicado al sistema característico, hay una única solución, es decir,

$$
(x_1(t), x_2(t), u(t), p(t), q(t)) \equiv (y_1(t), y_2(t), z(t), \phi_{x_1}(y_1(t), y_2(t)), \phi_{x_2}(y_1(t), y_2(t)))
$$

□

Tras el lema (2.2.2) parece natural que la forma de proceder para construir soluciones de la ecuación en derivadas parciales (2.2.1) sea la siguiente:

Para una *banda inicial* dada, calcular las bandas características que la tienen por dato inicial.

Sea una curva dato $(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s))$ regular. Para tal curva dato hallamos funciones $(p^0(s), q^0(s))$ que verifiquen
i) *Condición de banda.-*
$(p^0(s), q^0(s), -1)$ es un vector normal a la tangente a $(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s))$ en cada s, es decir,

$$\frac{dx_1^0}{ds}p^0 + \frac{dx_2^0}{ds}q^0 = \frac{du^0}{ds}. \tag{2.2.10}$$

ii) *Condición de compatibilidad.-*
Para la *banda inicial* resultante,

$$(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s)),$$

se satisface

$$F(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s)) = 0, \tag{2.2.11}$$

que es la condición sobre los datos iniciales para que el sistema característico no sea sobredeterminado.

Por razones análogas a las argumentadas en el caso *quasi lineal* supondremos que la curva dato no es tangente a las características en ningún punto. De esta manera es de esperar que se pueda generar plano tangente.

Es claro que para que no sea tangente a las características, su vector tangente no tiene que ser colineal con el segundo miembro del sistema característico, es decir, debemos imponer la *condición de transversalidad* siguiente
(2.2.12)

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1^0}{ds} & \dfrac{dx_2^0}{ds} \\ F_p(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s)) & F_q(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s)) \end{pmatrix} \neq 0,$$

la cual excluye simultáneamente la posibilidad de que la curva dato tenga tangente paralela al eje u.

Con estos prerrequisitos podemos formular precisamente el problema de valores iniciales para la ecuación (2.2.1).

Problema de Cauchy.
Sea la ecuación

$$F(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}) = 0$$

bajo las hipótesis generales.

Dada una banda inicial,

$$(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s)),$$

verificando (2.2.10), (2.2.11) y (2.2.12), se trata de obtener una solución de la ecuación,

$$\phi : G \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R},$$

tal que

$$\begin{cases} \phi(x_1^0(s), x_2^0(s)) = & u^0(s) \\ \phi_{x_1}(x_1^0(s), x_2^0(s)) = & p^0(s) \\ \phi_{x_2}(x_1^0(s), x_2^0(s)) = & q^0(s). \end{cases}$$

A continuación demostramos el resultado de existencia y unicidad para el problema de Cauchy.

Se van a utilizar el teorema de la función inversa, de nuevo el teorema de Cauchy-Picard y el teorema de Peano de derivabilidad respecto a parámetros, de los cuales hemos dado ya referencias con anterioridad.

2.2.3. Teorema.

Sea la ecuación en derivadas parciales

$$F(x_1, x_2, u, p, q) = 0 \tag{2.2.13}$$

donde la función

$$F : \Omega \subset \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$$

tiene derivadas segundas continuas en Ω *y verifica* $|F_p| + |F_q| > 0$. *Sea* $(x_1^0(s), x_2^0(s))$ *y* $u^0(s)$, *definidas en* $I \subset \mathbf{R}$ *y con derivada segunda continua en* I. *Sean* $p^0(s)$ *y* $q^0(s)$ *con derivada primera continua en* I *satisfaciendo:*

i).- Condición de banda,

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1^0}{ds}(s)p^0(s) + \dfrac{dx_2^0}{ds}(s)q^0(s) = \dfrac{du^0}{ds}(s) \\ F(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s)) = 0. \end{cases} \tag{2.2.14}$$

ii).- Condición de transversalidad,

(2.2.15)

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1^0}{ds}(s) & \dfrac{dx_2^0}{ds}(s) \\ F_p(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s)) & F_q(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s)) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Entonces existe un entorno $G \subset \mathbf{R}^2$ *de la curva* $(x_1^0(s), x_2^0(s))$ *y una única función* $\phi : G \longrightarrow \mathbf{R}$ *tal que:*

(2.2.16)

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), \phi_{x_1}(x_1, x_2), \phi_{x_2}(x_1, x_2)) = 0 \quad \textit{para cada} \quad (x_1, x_2) \in G \\ \phi(x_1^0(s), x_2^0(s)) = u^0(s) \\ \phi_{x_1}(x_1^0(s), x_2^0(s)) = p^0(s) \\ \phi_{x_2}(x_1^0(s), x_2^0(s)) = q^0(s). \end{cases}$$

Observación.-De forma implícita estamos suponiendo que

$$(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s)) \in \Omega$$

Demostración.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales característico con dato inicial la banda del enunciado, es decir, para cada $s \in I$ se considera,

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= F_p, & x_1(0) &= x_1^0(s)\\
\frac{dx_2}{dt} &= F_q, & x_2(0) &= x_2^0(s)\\
\frac{du}{dt} &= pF_p + qF_q, & u(0) &= u^0(s)\\
\frac{dp}{dt} &= -F_{x_1} - pF_u, & p(0) &= p^0(s)\\
\frac{dq}{dt} &= -F_{x_2} - qF_u, & q(0) &= q^0(s).
\end{aligned}$$

Por el teorema de existencia y unicidad para el problema de Cauchy de ecuaciones diferenciales ordinarias, existe una única solución. Por las hipótesis de regularidad de F y de la banda dato, se concluye que la solución

$$\begin{cases}
x_1 = & X_1(s,t)\\
x_2 = & X_2(s,t)\\
u = & U(s,t)\\
p = & P(s,t)\\
q = & Q(s,t),
\end{cases}$$

es derivable con continuidad respecto a s y t.

Por (2.2.14) y la compatibilidad se tiene que

$$F(X_1(s,t), X_2(s,t), U(s,t), P(s,t), Q(s,t)) = 0.$$

Por (2.2.15) y satisfacerse los datos iniciales tenemos que $(X_1(s,t), X_2(s,t), U(s,t))$ define una superficie paramétricamente en un entorno de la curva dato. En efecto, el rango de la matriz jacobiana de (X_1, X_2, U) respecto a (s,t), es dos en un entorno de la curva dato, pues

$$\det\begin{pmatrix} X_{1s} & X_{2s}\\ X_{1t} & X_{2t}\end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1^0}{ds} & \dfrac{dx_2^0}{ds}\\ F_p(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s)) & F_q(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s))\end{pmatrix} \neq 0,$$

por la condición de transversalidad (2.2.15).

Como consecuencia de la observación anterior y del teorema de la función inversa se puede definir en entornos convenientemente pequeños de los puntos de la curva dato,

$$\begin{cases} s &= s(x_1, x_2) \\ t &= t(x_1, x_2) \end{cases}$$

Entonces podemos considerar las funciones compuestas

$$\begin{cases} u = U(s,t) = U(s(x_1,x_2), t(x_1,x_2)) \equiv u(x_1,x_2) \\ p = P(s,t) = P(s(x_1,x_2), t(x_1,x_2)) \equiv p(x_1,x_2) \\ q = Q(s,t) = Q(s(x_1,x_2), t(x_1,x_2)) \equiv q(x_1,x_2) \end{cases}$$

Además, como

$$F(X_1(s,t), X_2(s,t), U(s,t), P(s,t), Q(s,t)) = 0,$$

se tiene, sustituyendo

$$F(x_1, x_2, u(x_1,x_2), p(x_1,x_2), q(x_1,x_2)) = 0.$$

Para terminar la demostración del teorema lo único que falta establecer es que $u_{x_1} = p$ y $u_{x_2} = q$.

Este extremo va a exigir algunos cálculos que pasamos a efectuar a continuación.

Consideremos la función

$$f(s,t) = U_s - PX_{1s} - QX_{2s},$$

que para $t = 0$ verifica $f(s,0) = 0$ por la condición de banda (2.2.14). Queremos establecer que f es identicamente nula, lo que geométricamente significa que para cada t fijo, $(P, Q, -1)$ es un vector normal al plano tangente a (X_1, X_2, U). Para establecer que $f(s,t) \equiv 0$, se deriva respecto a t, es decir,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial t}(s,t) = \\
&= U_{st} - P_t X_{1s} - PX_{1st} - Q_t X_{2s} - QX_{2st} = \\
&= \frac{\partial}{\partial s}(U_t - PX_{1t} - QX_{2t}) + P_s X_{1t} + Q_s X_{2t} - P_t X_{1s} - Q_t X_{2s} = \\
&= F_p P_s + F_q Q_s + (F_{x_1} + F_u P) X_{1s} + (F_{x_2} + F_u Q) X_{2s},
\end{aligned}$$

pues $U_t - PX_{1t} - QX_{2t} \equiv 0$ y por las ecuaciones del sistema característico. Si se suma y se resta $F_u U_s$ y se reordenan términos se obtiene

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial t}(s,t) = \\
&= F_{x_1} X_{1s} + F_{x_2} X_{2s} + F_u U_s + F_p P_s + F_q Q_s - F_u(U_s - PX_{1,s} - QX_{2s}) = \\
&= F_s - F_u f \equiv -F_u f,
\end{aligned}$$

ya que $F_s \equiv 0$ por ser $F(X_1(s,t), X_2(s,t), U(s,t), P(s,t), Q(s,t)) \equiv 0$.
Llamemos $y(t) = f(s,t)$ para s fijo. Se ha obtenido la ecuación

$$y'(t) = -F_u y(t)$$

que tiene como solución

$$y(t) = y(0) exp\{-\int_0^t F_u dr\}$$

Como se tiene que $y(0) = 0$ resulta que $f(s,t) \equiv 0$, que se traduce en

$$U_s = PX_{1s} + QX_{2s}.$$

Esta ecuación y la tercera ecuación característica da el siguiente sistema,

(2.2.17)
$$\begin{cases} U_s = & PX_{1s} + QX_{2s} \\ U_t = & PX_{1t} + QX_{2t} \end{cases}$$

Además, teniendo en cuenta que $U(s,t) = u(X_1(s,t), X_2(s,t))$ y que, por ser funciones inversas,

$$\begin{cases} x_1 & = X_1(s(x_1,x_2), t(x_1,x_2)) \\ x_2 & = X_2(s(x_1,x_2), t(x_1,x_2)), \end{cases}$$

se tiene

$$\begin{cases} U_s = & u_{x_1} X_{1s} + u_{x_2} X_{2s} \\ U_t = & u_{x_1} X_{1t} + u_{x_2} X_{2t} \end{cases}$$

En consecuencia

(2.2.18)
$$(P, Q) \equiv (u_{x_1}, u_{x_2})$$

por ser soluciones de un mismo sistema lineal determinado, ya que

$$\det \begin{pmatrix} X_{1s} & X_{2s} \\ X_{1t} & X_{2t} \end{pmatrix} \neq 0$$

por la condición de transversalidad. Pero (2.2.18) se traduce en que

$$\begin{cases} P(s,t) & = u_{x_1}(X_1(s,t), X_2(s,t)) \\ Q(s,t) & = u_{x_2}(X_1(s,t), X_2(s,t)), \end{cases}$$

o bien,

$$\begin{cases} p(x_1,x_2) & = u_{x_1}(x_1,x_2) \\ q(x_1,x_2) & = u_{x_2}(x_1,x_2). \end{cases}$$

De esta forma queda establecido que $u(x_1, x_2)$ es solución de la ecuación. Que verifica el dato inicial es la siguiente sencilla comprobación:

$$\begin{aligned}
&u(x_1^0(s), x_2^0(s)) = u(X_1(s,0), X_2(s,0)) = U(s,0) = u^0(s),\\
&u_{x_1}(x_1^0(s), x_2^0(s)) = p(x_1^0(s), x_2^0(s)) = p(X_1(s,0), X_2(s,0)) = P(s,0) = p^0(s),\\
&u_{x_2}(x_1^0(s), x_2^0(s)) = q(x_1^0(s), x_2^0(s)) = q(X_1(s,0), X_2(s,0)) = Q(s,0) = q^0(s).
\end{aligned}$$

Por último, la unicidad es consecuencia directa del lema (2.2.2). Para establecerla, supongamos que existe otra solución $v = \psi(x_1, x_2)$, definida en un entorno de la curva dato. Trabajaremos en el entorno intersección del dominio de u y del dominio de v. Como el dato inicial $(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s))$ es común a las dos soluciones, la banda característica es común también a las dos soluciones según el lema (2.2.2). Si tal banda es

$$x_1 = X_1(s,t), \quad x_2 = X_2(s,t), \quad u = U(s,t), \quad p = P(s,t), \quad q = Q(s,t)$$

se tiene

$$v(X_1(s,t), X_2(s,t)) = U(s,t) = u(X_1(s,t), X_2(s,t))$$

Y esto concluye la prueba. $\square$

Como en la sección 2.1 el resultado es local. Nótese que demostramos la existencia en el entorno de cada punto de la banda dato. El entorno de la banda es la unión de tales entornos y la solución está bien definida dado que por la unicidad sobre las intersecciones de los entornos tiene un solo valor.

Para acabar esta sección ensayamos lo aprendido hasta ahora aplicándolo a un ejemplo que viene de la Óptica Geométrica: La ecuación *eikonal*.

Ejemplo.

Consideremos la ecuación

$$p^2 + q^2 = 1.$$

Desde el punto de vista geométrico la ecuación puede interpretarse como sigue. Sea $(p, q, -1)$, vector normal a una superficie solución, la proyección sobre el plano x_1x_2 según la ecuación tiene longitud 1, de forma que en el vector $e_2 = (p, q, -1)$ y el eje u forman un ángulo tal que

$$\arctan(-1) = \theta,$$

o, lo que es equivalente, el plano tangente forma un ángulo de $\dfrac{\pi}{4}$ con el eje u.

En óptica geométrica las líneas de nivel de las soluciones son llamadas *frentes de onda* y las curvas características *rayos*.

Es evidente que la ecuación satisface las condiciones de regularidad en

$$\Omega = \mathbf{R}^3 \times (\mathbf{R}^2 - 0).$$

Un sencillo cálculo pone de manifiesto que el cono de Monge en el punto (x_1^0, x_2^0, u^0) viene dado por las ecuaciones,

$$\begin{cases} (u - u^0) = & p(x_1 - x_1^0) + q(x_2 - x_2^0) \\ \dfrac{x_1 - x_1^0}{2p} = & \dfrac{x_2 - x_2^0}{2q} \\ 1 = & p^2 + q^2. \end{cases}$$

El sistema característico es entonces

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = & 2p \\ \dfrac{dx_2}{dt} = & 2q \\ \dfrac{du}{dt} = & 2(p^2 + q^2) \\ \dfrac{dp}{dt} = & 0 \\ \dfrac{dq}{dt} = & 0 \\ 1 = & p^2 + q^2, \end{cases}$$

y sustituyendo la sexta ecuación en la tercera el sistema se transforma en

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = & 2p \\ \dfrac{dx_2}{dt} = & 2q \\ \dfrac{du}{dt} = & 2 \\ \dfrac{dp}{dt} = & 0 \\ \dfrac{dq}{dt} = & 0, \end{cases}$$

cuyas soluciones se obtienen por integración elemental y resultan ser

$$\begin{cases} x_1 = & 2p^0 t + x_1^0 \\ x_2 = & 2q^0 t + x_2^0 \\ u = & 2t + u^0 \\ p = & p^0 \\ q = & q^0 \\ 1 = & p^2 + q^2. \end{cases}$$

Es claro ahora el porque del nombre de rayos que reciben las características.

Dada una curva dato en $\mathbf{R}^3$,

$$\Gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)),$$

los datos iniciales que se consideran para el sistema característico son las bandas obtenidas resolviendo el sistema

$$\begin{cases} p^0(s)\alpha'(s) + q^0(s)\beta'(s) = & \gamma'(s) \\ [p^0(s)]^2 + [q^0(s)]^2 = & 1. \end{cases}$$

El signo del discriminante de la ecuación de segundo grado que resulta de eliminar q^0 entre las dos ecuaciones es el mismo que la expresión

$$D = [\alpha']^2 + [\beta']^2 - [\gamma']^2.$$

Por tanto, si $D < 0$ no hay solución real y si $D > 0$ hay dos posibles bandas iniciales asociadas a la curva dato, a las cuales hay que imponer la condición de transversalidad

$$q^0\alpha' - p^0\beta' \neq 0.$$

Una vez obtenida la banda inicial se tiene la solución en paramétricas como en la prueba del teorema, por integración del sistema característico.

Obsérvese que si $\gamma(s)$ es constante se verifica que $D \geq 0$ y tenemos solución que se escribe en paramétricas,

$$\begin{cases} x_1 = & 2p^0(s)t + \alpha(s) \\ x_2 = & 2q^0(s)t + \beta(s) \\ u = & 2t + \gamma(s) \\ p = & p^0(s) \\ q = & q^0(s). \end{cases}$$

2.3.- Clasificación de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.

Tras el estudio del problema de Cauchy para las ecuaciones de primer orden que se ha hecho en las secciones anteriores, parece natural plantear el mismo problema para ecuaciones de orden superior. Nos limitaremos a dar algunos resultados de caracter cualitativo general, para ecuaciones de segundo orden y sólo en lo referente a la estructura algebraica de la ecuación, que es lo que permitirá la *clasificación en tipos.*

Comenzamos por estudiar algunos ejemplos que ayudan a ver los diferentes comportamientos del problema de Cauchy según las ecuaciones.

Todos ellos tienen en común que se trata de ecuaciones de orden dos en $\mathbf{R}^2$ y que, por tanto, fijamos dos datos; el valor de la función y de la derivada respecto a la dirección normal en una recta.

Ejemplo 1. Consideremos el problema siguiente

$$\text{(2.3.1)} \qquad \begin{cases} u_{xt} & = 0 \\ u(x,0) & = \phi_0(x) \\ u_t(x,0) & = \phi_1(x). \end{cases}$$

Suponemos los datos regulares, por ejemplo, con segunda derivada continua.

Sea $u(x,t)$ una solución *clásica*, es decir, una función con segundas derivadas continuas que verifica la ecuación puntualmente. Entonces, en particular, se verifica

$$0 = u_{xt}(x,0) = \phi_{1,x} = \phi_1'(x),$$

es decir, ϕ_1 *necesariamente es constante*. En consecuencia el problema (3.2.1) *no es soluble para cualquier dato*; pero, además, si se supone la condición de compatibilidad, $\phi_1 \equiv c$, donde c es constante, por integración elemental se tiene

$$u_t(x,t) = \alpha(t) \quad \text{independiente de} \quad x,$$

por lo que todas las funciones verificando la ecuación son de la forma

$$u(x,t) = w_1(x) + w_2(t)$$

De esta manera si tomamos una función $w_2(t) = ct + at^2$ con a arbitrario,

$$u_a(x,t) = \phi_0(x) + ct + at^2,$$

es solución.

Tenemos así una alternativa extrema

i) El problema (2.3.1) no es soluble si ϕ_1 no es constante.

ii) Si ϕ_1 es constante, el problema (2.3.1) tiene infinitas soluciones.

Como el lector ha comprendido la elección de w_2 solo requiere que $w_2(0) = 0$ y $w_2'(0) = c$. Por ejemplo, $w_2 = ct + t^r, \quad r > 0$, son elecciones válidas.

Ejemplo 2. Consideramos ahora el siguiente problema para la ecuación del calor

$$\text{(2.3.2)} \qquad \begin{cases} u_t = & u_{xx} \\ u(x,0) = & \phi_0(x) \\ u_t(x,0) = & \phi_1(x), \end{cases}$$

con datos regulares. Entonces en particular

$$\phi_1(x) = u_t(x,0) = u_{xx}(x,0) = \phi_0''(x).$$

Es decir, es un problema sobredeterminado. En este caso es más natural el resultado pues respecto a la variable t, la ecuación del calor es solo de orden 1.

Ejemplo 3. El problema que sigue requiere el uso de algunos resultados básicos de variable compleja. (Si fuese necesario, el lector puede encontrarlos en *L.V. Ahlfors, " Complex Analysis", Mc Graw Hill, 1979*)

$$\left\{ \begin{array}{lll} u_{xx} + u_{yy} & = 0 & \text{en} \quad y > 0 \\ u(x, 0) & = 0 & \\ u_y(x, 0) & = h(x). & \end{array} \right. \tag{2.3.3}$$

Una función $u(x, y)$ con segundas derivadas continuas y verificando la ecuación es llamada *armónica* y se verifica que $u = \Re f(z)$ para $f = u + iv$ función analítica en $y > 0$.

El *principio de reflexión de Schwarz* prueba que en nuestras hipótesis la función

$$\tilde{f}(z) = \left\{ \begin{array}{ll} f(z) & \Im z \geq 0 \\ \bar{f}(\bar{z}) & \Im z \leq 0, \end{array} \right.$$

donde $\bar{f} = u - iv$ es la función conjugada de f, es analítica. Además $\Re \tilde{f} = \tilde{u}$ donde

$$\tilde{u}(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} u(x, y) & y \geq 0 \\ u(x, -y) & y \leq 0, \end{array} \right.$$

y por tanto es analítica real. Pero en particular, $\tilde{u}(x, 0)$ y $\tilde{u}_y(x, 0)$ son analíticas reales. En consecuencia, si h no es analítica *no hay solución*, o dicho de otra forma el problema (2.3.3) es sobredeterminado. Podemos enunciar entonces que el problema de Cauchy para la ecuación de Laplace es sobredeterminado.

Ejemplo 4. Por último vamos a analizar otro problema de valores iniciales. Se trata de la ecuación de ondas.

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - u_{xx} & = 0 \\ u(x, 0) & = f(x) \\ u_t(x, 0) & = g(x). \end{array} \right. \tag{2.3.4}$$

Si se hace el cambio de coordenadas

$$\left\{ \begin{array}{ll} X = & \frac{1}{2}(x + t) \\ T = & \frac{1}{2}(x - t) \end{array} \right.$$

la ecuación se transforma en

$$u_{XT} = 0 \tag{2.3.5}$$

(véase la Sección 4.1 para encontrar todos los detalles).

Como se vio en el ejemplo 1 la solución general de (2.3.5) es

$$u(X,T) = w_1(X) + w_2(T),$$

o bien en las coordenadas primitivas

$$u(x,t) = w_1(x+t) + w_2(x-t).$$

Si se imponen los datos se obtiene *de manera única* que la solución de (2.3.4) es

$$u(x,t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds.$$

que es la conocida como fórmula de D'Alambert. (Véase Sección 4.1.)

Si se reflexiona sobre los ejemplos anteriores lo único que parece claro hasta el momento es que el problema de Cauchy respecto a existencia y unicidad de la solución depende de alguna *misteriosa* relación entre la ecuación en derivadas parciales y la superficie donde se prescriben los datos.

Analizaremos brevemente qué es lo que ocurre estudiando las ecuaciones de segundo orden en dos variables independientes. Así, la ecuación lineal general es

(2.3.6)
$$a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} + b_1(x,y)u_x + b_2(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y).$$

Para tratar de encontrar una forma equivalente y sencilla de la ecuación (2.3.6), se considera el cambio de variables

$$\left\{\begin{array}{ll} t = & \phi(x,y) \\ s = & \psi(x,y), \end{array}\right. \tag{2.3.7}$$

es decir, funciones regulares en $\mathbf{R}^2$ tales que su jacobiano es distinto de cero. En estas hipótesis (2.3.7) es un cambio de variables *local*. Supondremos además que la aplicación (2.3.7) de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^2$ es biyectiva.

Respecto a este cambio de variables las derivadas se transforman como sigue

$$\begin{aligned} u_x &= u_t t_x + u_s s_x, \\ u_y &= u_t t_y + u_s s_y, \\ u_{xx} &= u_{tt}(t_x)^2 + 2u_{ts}t_x s_x + u_{ss}(s_x)^2 + u_t t_{xx} + u_s s_{xx}, \\ u_{yy} &= u_{tt}(t_y)^2 + 2u_{ts}t_y s_y + u_{ss}(s_y)^2 + u_t t_{yy} + u_s s_{yy}, \\ u_{xy} &= u_{tt}t_x t_y + u_{ts}(t_x s_y + t_y s_x) + u_{ss}s_x s_y + u_t t_{xy} + u_s s_{xy}. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Sustituyendo en la ecuación (2.3.6) se obtiene

$$\alpha_{11}u_{tt} + 2\alpha_{12}u_{ts} + \alpha_{22}u_{ss} + R(t,s,u,u_t,u_s) = 0,$$

donde R es una función lineal en u, u_t, u_s y es independiente de las derivadas segundas. Los nuevos coeficientes son

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= a_{11}(t_x)^2 + 2a_{12}t_xt_y + a_{22}(t_y)^2, \\ \alpha_{12} &= a_{11}t_xs_x + a_{12}(t_xs_y + t_ys_x) + a_{22}t_ys_y, \\ \alpha_{22} &= a_{11}(s_x)^2 + 2a_{12}s_xs_y + a_{22}(s_y)^2. \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Observamos que α_{11} y α_{22} tienen la misma forma. Una manera de simplificar la ecuación es intentar encontrar el cambio de variables de forma que

$$\alpha_{11} = 0 = \alpha_{22}.$$

Pero esto es equivalente a encontrar dos soluciones de la ecuación en derivadas parciales de primer orden

$$a_{11}p^2 + 2a_{12}pq + a_{22}q^2 = 0, \tag{2.3.10}$$

que tengan jacobiano no nulo. Si $\phi(x, y)$ es solución de (2.3.10), a la curva $\phi(x, y) = c$ la llamaremos *curva característica* de la ecuación en derivadas parciales (2.3.6). El resultado de si existen dos curvas características por cada punto, será positivo o no, dependiendo de cuantas bandas iniciales asocia la ecuación a cada punto, y ello es equivalente a estudiar el discriminante de la ecuación de segundo grado

$$a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{22} = 0.$$

En función de este discriminante clasificaremos la ecuación. Sea $\mathcal{D} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ entonces,

1) La ecuación (2.3.6) es de *tipo hiperbólico* si y sólo si $\mathcal{D} > 0$.
2) La ecuación (2.3.6) es de *tipo elíptico* si y sólo si $\mathcal{D} < 0$.
3) La ecuación (2.3.6) es de *tipo parabólico* si y sólo si $\mathcal{D} = 0$.

A) Es claro que en el caso de ser la ecuación de tipo hiperbólico puede conseguirse que

$$\alpha_{11} = 0 = \alpha_{22},$$

eligiendo ϕ y ψ soluciones independientes de la ecuación (2.3.10). En este caso la ecuación se reduce a su forma *normal*

$$u_{ts} = F \tag{2.3.11}$$

donde $F = \dfrac{R}{\alpha_{12}}$. Si ahora hacemos el cambio

$$\begin{cases} X = & \frac{1}{2}(s + t) \\ T = & \frac{1}{2}(s - t) \end{cases} \tag{2.3.12}$$

la ecuación (2.3.11) se transforma en la ecuación de ondas

$$u_{XX} - u_{TT} = 4F, \tag{2.3.13}$$

es decir, la ecuación de ondas es la forma *canónica* de las ecuaciones de tipo hiperbólico.

B) Si la ecuación es de tipo elíptico, es decir, $\mathcal{D} < 0$, podemos tomar las bandas iniciales con valores complejos, obteniendose de esta forma una solución de (2.3.10), $t = \phi$, que tiene valores complejos. Además la conjugada compleja $s = \bar{\phi}$ de ϕ es la otra solución independiente. Se deja al lector comprobar todos los extremos formales de estas aseveraciones.

Se puede ahora seguir el mismo proceso que en el caso hiperbólico y, para no trabajar con cantidades complejas, podemos considerar el cambio de variables

$$\begin{cases} X = & \dfrac{1}{2}(s+t) \\ Y = & \dfrac{1}{2i}(s-t) \end{cases} \tag{2.3.14}$$

que provee la forma *normal*

$$u_{XX} + u_{YY} = 4F \tag{2.3.15}$$

Como vemos la ecuación de Poisson o, si se prefiere, la ecuación de Laplace no homogénea, es la forma *canónica* de las ecuaciones de tipo elíptico.

C) Si $\mathcal{D} = 0$, es decir, si la ecuación (2.3.6) es de tipo parabólico, tenemos una única banda que proporciona una solución $t = \phi(x, y)$. Tomamos una función arbitraria que complete el cambio de variables $s = \psi(x, y)$. Obsérvese que por ser $\mathcal{D} = 0$ tenemos

$$a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}},$$

de donde,

$$\alpha_{11} = (\sqrt{a_{11}}t_x + \sqrt{a_{22}}t_y)^2 = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= a_{11}t_x s_x + a_{12}(t_x s_y + t_y s_x) + a_{22}t_y s_y = \\ &= (\sqrt{a_{11}}t_x + \sqrt{a_{22}}t_y)(\sqrt{a_{11}}s_x + \sqrt{a_{22}}s_y) = 0. \end{aligned}$$

En resumen, la ecuación se reduce a la forma *canónica*

$$u_{ss} = G, \tag{2.3.16}$$

donde $G = \dfrac{R}{\alpha_{22}}$.

La ecuación del calor es un caso de ecuación de tipo parabólico.

Como puede verse las ecuaciones tipo aparecen como *Formas Canónicas* de las ecuaciones de segundo orden. Los nombres adjudicados a cada clase son motivados por la siguiente observación. Cada clase corresponde al caso que la forma cuadrática

$$(x, y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

represente geométricamente a una hipérbola, una elipse o una parábola, respectivamente.

De esta forma es natural extender este tipo de clasificación a ecuaciones en $\mathbf{R}^n$. En efecto, sea la ecuación de segundo orden

$$\mathcal{P}(x, D)u \equiv \sum_{i=1,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u + f(x) = 0, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

a la que asociamos la ecuación de las *superficies características* que por analogía al caso de $n = 2$ es

$$\sum_{i=1,j=1}^{n} a_{ij}(x)\phi_{x_i}\phi_{x_j} = 0. \tag{2.3.17}$$

La forma cuadrática asociada en un punto x_0, es

$$\mathcal{Q}(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11}(x_0) & a_{12}(x_0) & \dots & a_{1n}(x_0) \\ a_{11}(x_0) & a_{22}(x_0) & \dots & a_{2n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(x_0) & a_{n2}(x_0) & \dots & a_{nn}(x_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{2.3.18}$$

que como es simétrica, por hipótesis, tiene todos sus autovalores reales. Se define el *índice de inercia* T de (2.3.18), como el número de autovalores negativos. Se define también el *defecto* D de (2.3.18), como el número de autovalores nulos.

Clasificación de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.

1) La ecuación (2.3.17) es de *tipo elíptico* si y sólo si $D = 0$ y $T = 0$ o $D = 0$ y $T = n$.

2) La ecuación (2.3.17) es de *tipo hiperbólico* si y sólo si $D = 0$ y $T = 1$ o $D = 0$ y $T = n - 1$.

3) La ecuación (2.3.17) es de *tipo parabólico* si y sólo si $D > 0$.

4) La ecuación (2.3.17) es de *tipo ultra-hiperbólico* si y sólo si $1 < T < n - 1$ y $D = 0$.

Dejamos que el lector complemente toda la parte algebraica que necesite. Una referencia a tal efecto puede ser el capítulo 6 del libro *"Topics in Algebra"* de I.N. Herstein (Ed. John Wiley 1975).

A la vista de estas consideraciones volvemos a nuestro problema inicial de intentar entender la diversidad de comportamiento de los ejemplos de los que partió nuestro estudio. Por claridad consideramos sólo el caso $n = 2$.

Tenemos que la ecuación que define las características asigna un cono de direcciones a cada punto x_0,

$$C(x_0) = \{(\eta_1, \eta_2) \quad | \quad a_{11}(x_0)\eta_1^2 + 2a_{12}(x_0)\eta_1\eta_2 + a_{22}(x_0)\eta_2^2 = 0\},$$

al cual llamaremos *cono característico.*

Si se toma una dirección $\eta \in C(x_0)$ y la característica con tal dirección como normal, el cambio de variables que se hizo antes da que:

La ecuación no es de orden dos en la dirección η.

Como consecuencia:

Si fijamos datos sobre una característica el problema de Cauchy resultante es sobredeterminado.

Ejemplos.

1'.- La ecuación $u_{xt} = 0$ tiene como cono característico a

$$C = \{(\eta_1, \eta_2)|\eta_1\eta_2 = 0\}.$$

Las direcciones características son $(1, 0)$ y $(0, 1)$ y las curvas características son

$$x = \alpha, \quad \text{y} \quad t = \beta.$$

El Ejemplo 1) del comienzo tiene fijados los datos sobre la característica $t = 0$ y es sobredeterminado.

2'.- La ecuación $u_t - u_{xx} = 0$ tiene como cono característico a

$$C = \{(\eta_1, \eta_2)|\eta_2^2 = 0\}.$$

Las direcciones características son $(0, 1)$ y las curvas características son

$$t = \beta.$$

En el Ejemplo 2) del comienzo se tiene fijados los datos sobre la característica $t = 0$ y es sobredeterminado.

Veremos en el capítulo correspondiente a la ecuación del calor, que en este caso tiene sentido considerar el problema de Cauchy con único dato $u(x, 0)$.

3'.- La ecuación $u_{xx} + u_{yy} = 0$ tiene como cono característico a

$$C = \{(\eta_1, \eta_2) | \eta_1^2 + \eta_2^2 = 0\} \equiv \{0\},$$

es decir, el cono es degenerado. No hay características reales, por consiguiente. El ejemplo 3) del comienzo tiene fijados los datos sobre $t = 0$ y es sobredeterminado. En este caso necesitaremos consideraciones de otro tipo, que se harán más adelante.

4'.- La ecuación $u_{tt} - u_{xx} = 0$ tiene como cono característico a

$$C = \{(\eta_1, \eta_2) | \eta_1^2 - \eta_2^2 = 0\}.$$

Las direcciones características son $(1,1)$ y $(1,-1)$ y las curvas características son

$$x + t = \alpha, \quad \text{y} \quad x - t = \beta$$

En este caso el ejemplo 4 tiene fijados los datos sobre $t = 0$, *que no es característica* y el problema tiene solución única.

Consideremos el problema de Cauchy con datos en la superficie

$$S = \{(x, y) \,|\, g(x, y) = 0\},$$

es decir,

$$(P) \qquad \begin{cases} a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} + \\ \;+ b_1(x,y)u_x + b_2(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y) \\ u(x,y) = u_0(x,y) \quad \text{si} \quad (x,y) \in S \\ u_\nu(x,y) = u_1(x,y) \quad \text{si} \quad (x,y) \in S, \end{cases}$$

donde u_ν significa la derivada de u en la dirección ν de la normal a S. Como resumen de esta sección tenemos:

- *El comportamiento del problema de Cauchy (P) depende de si la curva S sobre la que se fijan los datos es solución o no de*

$$a_{11}p^2 + 2a_{12}pq + a_{22}q^2 = 0,$$

  es decir, si S es característica o no.

- *Si S es característica la ecuación no es genuinamente de orden dos en la dirección de su normal y, en consecuencia, el problema (P) es sobredeterminado.*

- *En el caso en que no hay características reales, es decir, cuando la ecuación es de tipo elíptico el problema (P) es sobredeterminado, pero en este caso el comportamiento está determinado por la propia ecuación.*
  Su estudio se hace a continuación.

Esclarecemos lo que ocurre en el caso de la ecuación de Laplace. Nos fijamos en la ecuación escrita en forma normal con coeficientes constantes

$$u_{tt} = au_{xx} + bu_{xt} + cu_t + du_x + eu, \quad a, b, c, d, e \in \mathbf{R},$$

y buscamos soluciones de la forma a $u(x,t) = e^{\lambda t + ix\xi}$ para $\xi \in \mathbf{R}$ fijo. De esta forma u es solución cuando se verifica que λ y ξ están relacionados por

$$\lambda^2 + a\xi^2 - ib\lambda\xi - c\lambda - id\xi - e = 0. \tag{2.3.19}$$

Para cada $\xi \in \mathbf{R}$ existen dos valores complejos de λ, que por estimación directa verifican $|\lambda(\xi)| \leq c(1 + |\xi|)$.

Supongamos que λ verifica (2.3.19) y consideremos el problema no característico

$$(H) \qquad \begin{cases} u_{tt} = au_{xx} + bu_{xt} + cu_t + du_x + eu \\ u(x,0) = e^{ix\xi} \\ u_t(x,0) = \lambda e^{ix\xi}. \end{cases}$$

El matemático francés J. Hadamard propuso el término *problema bien propuesto* para aquel que tiene solución única y, además, ésta depende continuamente de los datos.

Si suponemos que (H) está bien propuesto la solución es $u(x,t) = e^{\lambda t + ix\xi}$. Para que haya dependencia continua se debe verificar que para $T > 0$ fijo

$$|u(x,t)| \leq e^{|\Re\lambda(\xi)|T} \leq C(\sup|u(x,0)| + \sup|u_t(x,0)|) \leq C(1 + |\lambda(\xi)|).$$

Por tanto, si el problema está bien propuesto se ha de verificar

$$|\Re\lambda(\xi)| \leq C + a\log(1 + |\xi|), \tag{2.3.20}$$

que se conoce como *condición de Hadamard.*

No es difícil comprobar que el problema no característico para el operador hipérbólico verifica la condición de Hadamard.

Por el contrario, la ecuación de Laplace no la satisface, ya que, $\lambda(\xi) \in \mathbf{R}$ y

$$\lambda^2(\xi) = |\xi|^2$$

y, por tanto, crece más que un logaritmo.

En resumen,

El problema de Cauchy para la ecuación de Laplace no está bien propuesto, pues no verifica la condición de Hadamard.

Todos los resultados tienen su contrapartida en $\mathbf{R}^n$ y para ecuaciones de orden mayor, pero no serán detallados aquí.

2.4.- El teorema de Cauchy-Kovalevsky.

Esta sección la dedicamos a estudiar un resultado clásico. Para una ecuación diferencial ordinaria particular cuyo segundo miembro es expresable como la suma de una serie de potencias, el propio Newton obtuvo la solución del problema de Cauchy también como una serie, calculándose los coeficientes por identificación.

El caso de las ecuaciones en derivadas parciales es debido a Cauchy y a Sonia Kovalevsky. Una vez más recomendamos para una reseña histórica fiable el libro de M. Kline al que nos hemos referido en repetidas ocasiones. Una corta biografía de Sonia Kovalevsky puede encontrarse en *"Women in Mathematics"* de L.M Osen, M.I.T. Press 1974.

Vamos a plantear el problema en un contexto muy concreto, advirtiendo al lector, que una versión general puede encontrarla, por ejemplo, en *G. Folland, "Introduction to Partial Differential Equations", Princeton University Press, 1976.*

Consideraremos el problema

$$\left\{\begin{aligned} u_{tt} =& F(t, x, u, u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx}) \\ u(x,0) =& \phi_0(x) \\ u_t(x,0) =& \phi_1(x), \end{aligned}\right. \tag{2.4.1}$$

donde $F(t, x, u, p, q, r, s)$, ϕ_0 y ϕ_1 se suponen funciones analíticas en todas sus variables en un entorno del origen.

Obsérvese que la recta $t = 0$, sobre la que se dan los datos, es analítica.

Transformaremos el problema (2.4.1) en una forma equivalente para la que se probará el teorema de Cauchy-Kovalevsky sobre la existencia de una única solución analítica en un entorno del origen.

Por conveniencia del lector damos la siguiente definición.

2.4.1 Definición.

Sea $R = \{x \in \mathbf{R}^n | \quad |x| < r \quad \}$*. Una función*

$$f : R \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$$

se dice que es analítica real en R si y solo si existe una sucesión de números reales $\{a_{i_1\ldots i_n}\}_{i_1..i_n\in\mathbf{N}}$ tal que en cada $(x_1,\ldots,x_n)\in R$

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i_1,\ldots i_n=1}^{\infty} a_{i_1\ldots,i_n}x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n},$$

donde la serie converge absolutamente.

Por el criterio de mayoración de Weierstrass, si f es análitica en R, la serie que la representa converge uniformemente en $|x|<r-\varepsilon$.

Transformamos el problema (2.4.1) de la manera siguiente: llamamos

$$y_{00}=u,\qquad y_{10}=u_x,\qquad y_{01}=u_t,\qquad y_{11}=u_{xt},\qquad y_{20}=u_{xx},\qquad y_{02}=u_{tt}$$

(obsérvese que el doble subíndice nos recuerda las derivadas respecto a x y t, respectivamente). Así obtenemos el sistema de ecuaciones en derivadas parciales equivalente

$$\begin{cases} (y_{00})_t = y_{01}\\ (y_{10})_t = y_{11}\\ (y_{01})_t = y_{02}\\ (y_{11})_t = (y_{02})_x\\ (y_{20})_t = (y_{11})_x\\ (y_{02})_t = F_t+\sum\limits_{i+j<2} F_{y_{ij}}y_{i(j+1)}+\sum\limits_{i+j=2,j<2} F_{y_{ij}}(y_{(i-1)(j+1)})_x \end{cases} \tag{2.4.2}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} y_{00}(x,0)= & \phi_0(x)\\ y_{10}(x,0)= & (\phi_0)_x(x)\\ y_{01}(x,0)= & \phi_1(x)\\ y_{11}(x,0)= & (\phi_1)_x(x)\\ y_{20}(x,0)= & (\phi_0)_x(x)\\ y_{02}(x,0)= & F(0,x,\phi_0(x),(\phi_0)_x(x),\phi_1(x),(\phi_1)_x,(\phi_0)_{xx}(x)) \end{cases} \tag{2.4.3}$$

Se deja al lector comprobar que si y_{00} es la primera componente de una solución del problema (2.4.2), (2.4.3), entonces es solución del problema (2.4.1). Escrito en esta forma se obtiene que el problema (2.4.1) se ha transformado, con un cambio de nombres de las variables, en un caso particular de

$$\begin{pmatrix} Y_{1t}(t,x)\\ \vdots\\ Y_{6t}(t,x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}(t,x,\mathbf{Y}) & \ldots & A_{16}(t,x,\mathbf{Y})\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ A_{61}(t,x,\mathbf{Y}) & \ldots & A_{66}(t,x,\mathbf{Y})\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_{1x}(t,x)\\ \vdots\\ Y_{6x}(t,x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_1(t,x,\mathbf{Y}))\\ \vdots\\ B_6(t,x,\mathbf{Y})\end{pmatrix},$$

donde

$$A_{ij}(t,x,\Psi) \quad \text{y} \quad B_i(t,x,\Psi)$$

son funciones analíticas.

Escrito matricialmente tenemos la misma forma que la ecuación *quasi lineal* de la Sección 2.1, es decir,

$$(2.4.4) \qquad \begin{cases} \mathbf{Y}_t(t,x) = \tilde{\mathbf{A}}(t,x,\mathbf{Y})\mathbf{Y}_x(t,x) + \tilde{\mathbf{B}}(t,x,\mathbf{Y}) \\ \mathbf{Y}(0,x) = \Phi(x) \end{cases}$$

que si le aumentamos con una ecuación más le podemos considerar *autónomo*, es decir, si añadimos la ecuación $(Y_7)_t = 1$, y además hacemos el cambio

$$\mathbf{U}(t,x) = \mathbf{Y}(t,x) - \Phi(x),$$

(2.4.4) se convierte en

$$(2.4.5) \qquad \begin{cases} \mathbf{U}_t = \mathbf{A}(x,\mathbf{U})\mathbf{U}_x + \mathbf{B}(x,\mathbf{U}) \\ \mathbf{U}(0,x) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

Para este problema con $(x,\mathbf{U}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, es para el que estudiaremos el resultado de existencia.

Para comenzar establecemos los resultados de series de potencias que se van a usar y previamente introducimos la notación que se usa para trabajar cómodamente con multiíndices.

Notación.

Como se ha podido apreciar la necesidad del uso de índices múltiples complica extraordinariamente la escritura, dificultando a menudo la comprensión inmediata de lo que las fórmulas significan. La notación que proponemos a continuación y que usaremos en esta sección, fue introducida por Laurent Schwarwz en los años 50, cuando creó la Teoría de Distribuciones. En resumen es la siguiente:

Sea un multíndice $(i_1,\ldots,i_n) \in \mathbf{N}^n$, convendremos en notarle $\alpha = (i_1,\ldots,i_n)$. Sea $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n$. Entonces escribiremos

$$|\alpha| \equiv \sum_1^n i_j$$

$$\alpha! \equiv i_1!\ldots i_n!$$

$$x^\alpha \equiv x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$$

$$D_x^\alpha f(x_0) \equiv f_{x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}}(x_0)$$

Dado otro multíndice $\beta = (j_1,\ldots,j_n)$ diremos que

$$\alpha \le \beta \quad \text{si y sólo si} \quad i_l \le j_l, \quad \text{para todo} \quad l = 1,\ldots,n$$

Proposición. *(Propiedades de las funciones analíticas)*
Sea f una función analítica en R entonces

(1) *f es indefinidamente derivable, y sus derivadas se obtienen derivando la serie término a término y, además,*

$$a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha f(0).$$

(2) *Si se tiene la función analítica en un entorno de $t = 0$,*

$$x(t) = \sum_\beta b_\beta t^\beta,$$

entonces $h(t) = f(x(t))$, es analítica siendo los coeficientes de la serie de h obtenidos por la fórmula

$$c_\gamma = \frac{1}{\gamma!} D_t^\gamma h(0) = P_\gamma(b_\beta, a_\alpha), \quad \alpha, \beta \leq \gamma,$$

donde P_γ es un polinomio con coeficientes positivos independiente de f y x.

Un ejemplo de función analítica que usaremos es el siguiente:
Dados $M, r > 0$

$$f(x_1 \dots x_n) = \frac{Mr}{r - (x_1 + \dots + x_n)}$$

es analítica en

$$R = \{x \in \mathbf{R}^n | \quad \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| < \frac{r}{n}\},$$

siendo su serie de Taylor

$$f(x_1, \dots, x_n) = M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^k}{r^k} = M \sum_{i_1, \dots, i_n = 0}^{\infty} \frac{(i_1 + \dots + i_n)!}{i_1! \dots i_n! r^{(i_1 + \dots + i_n)}} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}.$$

Otra idea importante es la de *mayoración de series.* Dadas

$$f(x) = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$$

y

$$g(x) = \sum_\alpha b_\alpha x^\alpha,$$

funciones analíticas, diremos que f mayora a g si se verifica que

$$a_\alpha \geq |b_\alpha|$$

para todos los índices.

Dada una función analítica

$$f(x) = \sum_{\alpha} a_\alpha x^\alpha$$

en R, tomando $\rho < r$, definiendo

$$\sum_{\alpha} |a_\alpha| \rho^{|\alpha|} < M,$$

entonces la serie geométrica de coeficientes

$$b_\alpha = \frac{M}{r^{|\alpha|}}$$

es una mayorante de la serie que define a f, en $R_\rho = \{x \quad | \quad |x_i| < \rho, \quad i = 1 \dots n\}$,

2.4.2. Teorema. *(Cauchy-Kovalevsky)*

Sea el problema

$$\begin{cases} \mathbf{U}_t = \mathbf{A}(x, \mathbf{U})\mathbf{U}_x + \mathbf{B}(x, \mathbf{U}) \\ \mathbf{U}(0, x) = \mathbf{0} \end{cases} \tag{2.4.5}$$

tal que la matriz $\mathbf{A}$ *y el vector* $\mathbf{B}$ *tienen componentes analíticas como funciones de* $(x, \mathbf{U})$ *en un entorno del origen, entonces (2.4.5) tiene una única solución analítica.*

Demostración.

Como por hipótesis los datos son analíticos tenemos que sobre un entorno del origen, $R = \{(x, \eta) \quad | \quad |x| < \delta, |\eta| < \delta\}$, se pueden expresar por las series

$$\mathbf{A}(x, \eta) = \sum_{i,\beta} a_{i\beta} x^i \eta^\beta,$$

$$\mathbf{B}(x, \eta) = \sum_{i,\beta} b_{i\beta} x^i \eta^\beta,$$

donde $a_{i\beta}$ es una matriz y $b_{i\beta}$ un vector, que resultan por la fórmula de Taylor

$$a_{i\beta} = \frac{D_x^i D_\eta^\beta \mathbf{A}(0,0)}{i!\beta!},$$

$$b_{i\beta} = \frac{D_x^i D_\eta^\beta \mathbf{B}(0,0)}{i!\beta!}.$$

Buscamos una solución de la forma

$$\mathbf{Y}(t,x)=\sum_{i=0,j=0}^{\infty} c_{ij}x^i t^j, \quad \text{donde} \quad c_{ij}=\frac{D_x^i D_t^j \mathbf{Y}(0,0)}{i!j!}.$$

Procedemos en varias etapas

1) Si se impone que se verifique la condición inicial, necesariamente debemos tener $c_{i0}=0$ cualquiera que sea el índice $i=0,1,\ldots$, ya que, $\mathbf{Y}(0,x)=0$.
2) Además por verificarse la ecuación

$$\begin{aligned} D_t\mathbf{Y}(t,x) &= \sum_{i=0,j=0}^{\infty}(j+1)c_{i(j+1)}x^i t^j \equiv \\ &\equiv \mathbf{A}(x,\mathbf{Y}(t,x))D_x\mathbf{Y}(t,x)+\mathbf{B}(t,x)\equiv \sum_{ij} P_{ij}(c_{lm},a_\alpha,b_\beta)x^i t^j, \end{aligned}$$

donde el polinomio $P_{ij}(c_{lm},a_\alpha,b_\beta)$, siendo $|\alpha|,|\beta|\le i+j$, $l\le i$ y $m\le j$, tiene coeficientes positivos.

Por identificación se obtiene entonces

$$c_{i(j+1)}=\frac{P_{ij}(c_{lm},a_\alpha,b_\beta)}{j+1}, \quad l\le i, \quad m\le j \quad |\alpha|,|\beta|\le i+j \tag{2.4.6}$$

Así, si se conocen c_{lm} para cada $l=0,1,\ldots$ y $m\le j$, (2.4.6) da los coeficientes $c_{i(j+1)}$. Este *algoritmo* permite calcular por recurrencia una serie formal, que de haber solución analítica debe ser la que la representa. Obsérvese que este argumento implica unicidad de solución analítica al obtenerse los coeficientes de la serie de manera única al imponer el dato y que verifique formalmente la ecuación.

Por tanto, resta comprobar que la serie formal obtenida converge en algún entorno del origen.

3) Sea $r<\delta$ y sea

$$R_r=\{(x,y_1,\ldots,y_n) \quad | \quad |x|<r, \quad |y_i|<r, i=1,\ldots,n\}.$$

Si $(x,Y)\in R_r$ se tiene

$$\sum_{\alpha,i}\frac{D_x^i D_Y^\alpha \mathbf{A}(0,0)}{i!\alpha!}x^i Y^\alpha \le \sum_{\alpha,i}\frac{|D_x^i D_Y^\alpha \mathbf{A}(0,0)|}{i!\alpha!}r^i r^{|\alpha|}\le M_1 \tag{2.4.7}$$

$$\sum_{\alpha,i}\frac{D_x^i D_Y^\alpha \mathbf{B}(0,0)}{i!\alpha!}x^i Y^\alpha \le \sum_{\alpha,i}\frac{|D_x^i D_Y^\alpha \mathbf{B}(0,0)|}{i!\alpha!}r^i r^{|\alpha|}\le M_2 \tag{2.4.8}$$

Tomando $M > \max\{M_1, M_2\}$ y los coeficientes

$$d_{i\alpha} = M\frac{1}{r^{i+|\alpha|}},$$

la serie resultante es una mayorante de la de **A** y la de **B**. Además

$$\begin{aligned}\Phi(x, \mathbf{Y}) &= M\sum_{i\alpha}\frac{x^i}{r^i}\frac{\mathbf{Y}^\alpha}{r^{|a|}} = M\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{(x+y_1+\ldots+y_n)}{r})^k = \\ &= \frac{M}{1-\dfrac{(x+y_1+\ldots+y_n)}{r}} = \frac{Mr}{r-(x+y_1+\ldots+y_n)}.\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

4) Como consecuencia, consideramos el *problema mayorante* que para cada componente resulta

$$\begin{cases} D_t z_k = \dfrac{Mr}{r-(x+y_1+\ldots+y_n)}(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} D_x z_i + 1) \\ z_k(x,0) = 0, \end{cases} \tag{2.4.10}$$

es decir, es un mismo problema para todas las componentes. Por esta razón buscamos soluciones de (2.4.10) de la forma

$$z_k(x,t) = v(x,t), \quad \text{para todo} \quad k = 1, \ldots, n$$

que verifica el problema

$$v_t = \frac{Mr}{r-x-nv}(nv_x+1) \quad \text{con dato inicial} \quad v(0,x) = 0. \tag{2.4.11}$$

Este problema admite solución explícita usando la técnica desarrollada en la sección (2.1).
En efecto, el sistema característico es

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{d\tau} = r - x - nv, & t(0) = 0 \\ \dfrac{dx}{d\tau} = -nMr, & x(0) = s \\ \dfrac{dv}{d\tau} = Mr, & v(0) = 0 \end{cases}$$

de donde resulta

$$\begin{cases} t(\tau, s) &= (r-s)\tau \\ x(\tau, s) &= -Mrn\tau + s \\ v(\tau, s) &= Mr\tau, \end{cases}$$

por lo que

$$\begin{cases} s & = nv + x \\ \tau & = \dfrac{v}{Mr}. \end{cases}$$

Sustituyendo

$$t = (r - nv - x)\frac{v}{Mr},$$

o bien,

$$v(t,x) = \frac{(r-x) \pm \sqrt{(r-x)^2 - 4nMrt}}{2n},$$

y como ha de ser $v(0,x) = 0$, entonces, necesariamente,

$$v(t,x) = \frac{(r-x) - \sqrt{(r-x)^2 - 4nMrt}}{2n},$$

es la solución de (2.4.11), que es obviamente analítica en un entorno de $(0,0)$.

5) Para finalizar basta comprobar que la solución de (2.4.10), problema mayorante, calculada en la etapa 4) anterior, es decir,

$$\vec{z}\,(t,x) = v(t,x)(1,\ldots,1),$$

es una mayorante de la serie formal obtenida como candidato a solución. Así habremos terminado la demostración por utilización del criterio de comparación. Si llamamos e_{ij} a los coeficientes de la serie representando a $\vec{z}$, repitiendo los cálculos de las etapas 1) y 2) anteriores, obtenemos

$$e_{i(j+1)} = \frac{P_{ij}(e_{lm}, d_\alpha, d_\beta)}{j+1}, \quad l \leq i, \quad m \leq j \quad |\alpha|, |\beta| \leq i + j$$

donde el polinomio con coeficientes positivos, P_{ij}, *es el mismo que en* (2.4.6) Por consiguiente, por recurrencia se tiene,

$$|c_{i(j+1)}| = |\frac{P_{ij}(c_{lm}, a_\alpha, b_\beta)}{j+1}| \leq \frac{P_{ij}(|c_{lm}|, |a_\alpha|, |b_\beta|)}{j+1} \leq \frac{P_{ij}(e_{lm}, d_\alpha, d_\beta)}{j+1} = e_{i(j+1)}$$

que establece el resultado. $\square$

Apéndice al Capítulo 2. Problema de Cauchy para la ecuación general de primer orden en $\mathbf{R}^n$.

Sea

$$\begin{aligned} F : \Omega \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, u, p) &\longrightarrow \quad F(x, u, p), \end{aligned}$$

función con dos derivadas continuas, definida en el abierto Ω.

Supondremos que

$$||\nabla_p F|| \equiv ||(F_{p_1}, \dots, F_{p_n})|| > 0$$

Denotamos por $\langle , \rangle$ al producto escalar en $\mathbf{R}^n$. Notaremos $p_i = u_{x_i}$.

La teoría elaborada en la sección (2.2) sugiere como estudiar el problema de Cauchy para la ecuación

$$(A.1) \qquad F(x, u, \nabla u) = 0$$

Se supone

$$u : G \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R},$$

solución de (A.1), y se considera el sistemas de curvas de Monge, que en este caso, y por los mismos argumentos que en la sección (2.2), resulta ser

$$(A.2) \qquad x'(t) = \nabla_p F(x(t), u, p).$$

Se considera la forma de variación de u y p a lo largo de una solución de (A.2)

$$\begin{cases} u'(t) = & \langle \nabla u(x(t)), x'(t) \rangle = \langle p(t), \nabla_p F(x(t), u(t), p(t)) \rangle \\ p'(t) = & (\langle \nabla u_{x_1}, x'(t) \rangle, \dots, \langle \nabla u_{x_n}), x'(t) \rangle = (\langle \nabla u_{x_1}, \nabla_p F \rangle, \dots, \langle \nabla u_{x_n}), \nabla_p F \rangle \end{cases}$$

pero como

$$F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0,$$

derivando respecto a cada coordenada x_k, $\quad k = 1, \dots, n$, obtenemos

$$F_{x_k} + F_u u_{x_k} + \langle \nabla_p F, (\nabla u)_{x_k} \rangle = 0,$$

por lo que resulta

$$p'(t) = -\nabla_x F - pF_u$$

El *sistema característico* así obtenido es

$$(A.3) \qquad \begin{cases} x'(t) & = \nabla_p F(x(t), u(t), p(t)) \\ u'(t) & = \langle p(t), \nabla_p F(x(t), u(t), p(t)) \rangle \\ p'(t) & = -\nabla_x F(x(t), u(t), p(t)) - p(t) F_u(x(t), u(t), p(t)) \\ F(x, u, p) & = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son llamadas *bandas características* y las proyecciones, $(x(t), u(t))$, se llaman curvas características.

Como en el caso de dimensión $n = 2$ es fácil de establecer que F es una integral primera para el sistema característico, es decir, F es constante a lo largo de las bandas características. Esto quiere decir que si partimos de datos que verifiquen la condición $F(x(t_0), u(t_0), p(t_0)) = 0$, entonces se verifica la misma condición sobre toda la banda. Así pues, con esta condición de compatibilidad (A.3) no es sobredeterminado.

Planteamos a continuación el *problema de Cauchy* para la ecuación (A.1).

Sea $U \subset \mathbf{R}^{n-1}$ un abierto y sea la aplicación

$$\gamma : U \longrightarrow \mathbf{R}^n,$$

con segundas derivadas continuas y tal que si $\gamma_s(s)$ designa la matriz jacobiana de γ, se verifica

$$\text{rango}(\gamma_s(s)) = n - 1, \quad \text{para} \quad s \in U$$

Sea también

$$\phi : U \longrightarrow \mathbf{R}$$

una función con derivadas segundas continuas.

Observamos que si $x^0 = \gamma(s^0)$, $u^0 = \phi(s^0)$ y $(x^0, u^0, p^0) \in \Omega$ es tal que

$$(A.4) \qquad \begin{cases} F(x^0, u^0, p^0) = 0, \\ p^0 \gamma(s_0) = 0, \\ \det(\gamma_s(s_0) \nabla_p F(x^0, u^0, p^0)) \neq 0, \end{cases}$$

entonces existe una única función definida en un entorno de s^0 con derivadas primeras continuas,

$$\pi : U(s^0) \longrightarrow \mathbf{R}^n,$$

tal que:

(1) $\pi(s^0) = p^0$

(2) $F(\gamma(s), \phi(s), \pi(s)) = 0$ para $s \in U(s^0)$.

(3) $\nabla_s \phi(s) = \pi(s) \gamma_s(s)$, $s \in U(s^0)$ (Condición de banda).

En efecto, basta notar que (A.4) y las hipótesis de regularidad, permiten aplicar el teorema de funciones implícitas a

$$G(s,p) = (p\gamma_s(s) - \nabla_s\phi(s), F(\gamma(s), \phi(s), p))$$

Obteniéndose así que en un entorno de s^0, $U(s^0)$, se tiene

$$G(s,\pi(s)) = 0 \quad \text{y} \quad \pi(s^0) = p^0,$$

pero estas son las condiciones que se buscaban.

A una tal función,

$$(\gamma(s), \phi(s), \pi(s)),$$

verificando 1), 2) y 3), le llamamos *banda inicial.*

Problema de Cauchy.

Podemos formularle como sigue.

Obtener una solución de

$$\begin{cases} F(x,u,\nabla u) = 0 & \textit{tal que verifique el dato} \\ u(\gamma(s)) = \phi(s), & s \in U \end{cases}$$

Como en el caso de dimensión $n = 2$ hemos de imponer algunas condiciones sobre los datos para que el problema tenga solución y ésta sea única. Tales condiciones son copia de las del caso estudiado y aparecen como hipótesis en el siguiente resultado.

A.1.- Teorema.

Sea F verificando todas las hipótesis anteriores en Ω abierto de $\mathbf{R}^{1+2n}$. Sean

$$\gamma : U \subset \mathbf{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbf{R} \quad \textit{y} \quad \phi : U \longrightarrow \mathbf{R}$$

funciones con dos derivadas continuas. Sean $\gamma(s^0) = x^0$, $\phi(s^0) = u^0$ y p^0 tales que,

(1) $F(x^0, u^0, p^0) = 0$
(2) $p^0\gamma_s(s^0) = \nabla_s\phi(s^0)$
(3) $\det(\gamma_s(s^0), \nabla_p F(x^0, u^0, p^0)) \neq 0$.

Entonces existe G, entorno de x^0 en $\mathbf{R}^n$ y

$$u : G \longrightarrow \mathbf{R},$$

tal que

$$\begin{cases} F(x,u(x),\nabla u(x)) = 0 & \textit{para} \quad x \in G \\ u(\gamma(s)) = \phi(s) \quad \textit{para} \quad s \in U & \textit{tal que} \quad \gamma(s) \in G. \end{cases}$$

Demostración.

Sea $\pi(s)$ verificando 1), 2) y 3) de la observación anterior, es decir, consideremos la banda

$$(\gamma(s), \phi(s), \pi(s)).$$

Sea

$$(X(t,s), U(t,s), P(t,s)),$$

solución del sistema característico (A.3), con dato inicial

$$X(0,s) = \gamma(s), \quad U(0,s) = \phi(s), \quad P(0,s) = \pi(s).$$

Por el teorema de Peano de diferenciabilidad respecto a los datos iniciales, se tiene que $(X(t,s), U(t,s), P(t,s))$, tiene derivadas primeras continuas para s cercano a s^0 y t pequeño. Además, por ser F integral primera y verificarse $F(\gamma(s), \phi(s), \pi(s)) = 0$, se tiene también que

$$F(X(t,s), U(t,s), P(t,s)) = 0. \tag{A.5}$$

Por otra parte, si llamamos $J_{(t,s)} \equiv (X(t,s))_{ts}$ a la matriz jacobiana de $X(t,s)$ se tiene que

$$\det J_{(t,s)}(0, s^0) = \det(\gamma_s(s^0), \nabla_p F(x^0, u^0, p^0)) \neq 0,$$

condición de transversalidad impuesta.

Así pues en un entorno $V(x^0)$ de x^0, la función $x = X(t,s)$ tiene inversa con derivadas primeras continuas, $(t,s) = X^{-1}(x)$. Entonces de $u(X(t,s)) = U(t,s)$ se obtiene, $u(x) = U(X^{-1}(x))$ y de $p(X(t,s)) = P(t,s)$ se concluye, $p(x) = P(X^{-1}(x))$. De esta forma (A.5) se convierte en

$$F(x, u(x), p(x)) = 0. \tag{A.6}$$

Para terminar la prueba hemos de establecer que

$$\nabla u(x) = P(X^{-1}(x)). \tag{A.7}$$

Pero como $U(t,s) = u(X(t,s))$ se obtiene

$$\nabla u(X(t,s)) X_{ts}(t,s) = U_{ts}(t,s). \tag{A.8}$$

Como $\det X_{ts}(t,s) \neq 0$ en un entorno de $(0, s^0)$, ∇u queda univocamente determinado por el sistema lineal (A.8). Entonces si también se puede probar que

$$P(t,s) X_{ts}(t,s) = U_{ts}(ts), \tag{A.9}$$

concluiremos que $P(t,s) = \nabla u(X(t,s))$. Es suficiente entonces, que probemos (A.9).

Del sistema característico obtenemos la relación

$$(A.10) \qquad U_t = \langle P, X_t \rangle.$$

Si consideramos la función

$$(A.11) \qquad \Phi(t,s) = U_s - PX_s,$$

se tiene en primer lugar que $\Phi(0,s) = 0$ por verificarse la condición de banda para el dato inicial. Además, derivando respecto a t,

$$\begin{aligned}\Phi_t &= (U_s)_t - P_tX_s - P(X_s)_t = (U_t - PX_t)_s + X_tP_s - P_tX_s = \\ &= \nabla_p FP_s + (\nabla_x F + F_uP)X_s + (F_uU_s - F_uU_s) = \\ &= (\nabla_x FX_s + F_uU_s + \nabla_p FP_s) - F_u(U_s - PX_s) = F_s - F_u\Phi,\end{aligned}$$

por (A.10) y el sistema característico. Además, de (A.5) se concluye que $F_s \equiv 0$, por lo que la expresión anterior se reduce a

$$\Phi_t = -F_u\Phi, \quad \text{con datoinicial} \quad \Phi(0,s) = 0 \quad \text{para cada} \quad s.$$

Por tanto $\Phi \equiv 0$ y (A.11) queda demostrado y como consecuencia que (A.9) se verifica. (Con la notación usada la matriz jacobiana X_{ts} tiene una primera columna que es X_t las restantes $(n-1)$ columnas son las de la matriz X_s.)

La unicidad de u, solución con dos derivadas continuas, es consecuencia del mismo argumento que en dimensión $n = 2$, es decir, dos soluciones coinciden sobre las soluciones del sistema característico con dato la banda inicial, por tanto, deben coincidir sobre la intersección de sus dominios de definición. □

EJERCICIOS DEL CAPITULO 2

1. Calcúlense las soluciones de $yu_x - xu_y = 0$ e interprétese geométricamente el resultado.

2. Sea

$$u = f(\frac{xy}{u}).$$

Elimínese f y obténgase la ecuación en derivadas parciales que verifica u.

3. Determínense todas las soluciones de la ecuación

$$(x+y)u_x + (u-x)u_y = (y+u)$$

4. Sea la ecuación
$$(xy-u)u_x + (y^2-1)u_y = uy - x$$
y las curvas dato
a) $y=0$, $x^2-u^2=1$.
b) $x^2+y^2=1$, $u=0$.
Resolver el problema de Cauchy para el dato a). Análogo para el dato b).

5. Sea la ecuación
$$uu_x - u_y = 0.$$
a) Hállense las curvas características.
b) Determínese la solución que pasa por la curva
$$y=0 \qquad u=x^2-1$$
y dibujar $u(x,0)$, $u(x,1)$, $u(x,2)$ y $u(x,3)$.

6. Sea el sistema diferencial
$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} x'(t) &= f(x(t),y(t),u(t)); \\ y'(t) &= g(x(t),y(t),u(t)); \\ u'(t) &= h(x(t),y(t),u(t)). \end{cases}$$
Se llama *integral primera* del sistema Σ a una función $W(x,y,u) \in \mathcal{C}^1$ tal que es constante a lo largo de las trayectorias de Σ.

¿Qué ecuación en derivadas verifica la integral primera W? Interprétese el resultado y diséñese un método para obtener integrales primeras.

7. Dos superficies se dicen ortogonales si son ortogonales sus planos tangentes en los puntos en que se cortan.

Pruébese que para que la gráfica de la función $u=\phi(x,y)$ sea una superficie ortogonal a la familia uniparamétrica de superficies definida implícitamente por $F(x,y,u,\alpha)=0$, es necesario y suficiente que verifique la ecuación
$$F_x\phi_x + F_y\phi_y = F_u.$$
Hállense las superficies ortogonales a la familia definida por $x^2+y^2=2\alpha u$.

8. Una función $u(x_1,x_2)$ se dice homogénea de grado $m>0$ si $u(\lambda x_1,\lambda x_2) = \lambda^m u(x_1,x_2)$. Pruébese que la condición necesaria y suficiente para que u sea homogénea de grado m es que verifique la ecuación
$$x_1u_{x_1} + x_2u_{x_2} = mu.$$
(Este resultado es conocido como teorema de Euler).

9. Consideramos la ecuación

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = u^2.$$

Se pide calcular la solución que verifica el dato $u = 1 \qquad x^2 + y^2 = 1.$

10. Calcular la solución de $u_y = u_x^3$ que verifica $u(x, 0) = 2x^{\frac{3}{2}}$

11. Calcular la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} p^2 - q^2 - 2u = 0 \\ x = 0 \\ u = (1 + y)^2. \end{cases}$$

12. Sea la ecuación

$$u = xp + yq + \frac{1}{2}(p^2 + q^2).$$

Determínese la solución verificando

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}(1 - x^2).$$

13. Dada la ecuación

$$p^2 + q^2 = 2(x^2 + y^2) + 4(x + y + 1),$$

sea $c(s) \equiv (\alpha(s), \beta(s), \gamma(s))$ una curva de Monge sobre la superficie

$$u = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + xy + 2x,$$

tal que para $s = 0$ pasa por el punto $(x_0, y_0, \frac{1}{2}(x_0^2 - y_0^2) + x_0 y_0 + 2x_0)$
a) Determinar la proyección de c sobre el plano $u = 0$.
b) Sea $x_0 = -1$, $y_0 = 0$; hallar la banda característica que verifique el dato

$$(-1, 0, -\frac{3}{2}, 1, -1).$$

14. Resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x^2 u_x + y^2 u_y = u^2 \\ y = 2x \\ u = 1. \end{cases}$$

15. Probar que si $v_1(x,y,u) = k_1$ y $v_2(x,y,u) = k_2$ son integrales primeras del sistema característico de la ecuación

$$fu_x + gu_y = h, \tag{1}$$

entonces para cada función arbitraria $\Phi \in \mathcal{C}^1$,

$$g(x,y,u) = \Phi(v_1(x,y,u), v_2(x,y,u)) = 0, \tag{2}$$

define una solución de (1). Pruébese que toda solución de (1) puede escribirse de la forma (2) si el rango del jacobiano de v_1, v_2 respecto a (x,y,u) es dos.

16. Dada una ecuación en derivadas parciales de primer orden, $F(x,y,u,p,q) = 0$, se llama *integral completa* a una familia biparamétrica de soluciones, $u = u(x,y,\alpha,\beta)$. Demostrar que:

1 Si la ecuación es de la forma $q = f(p)$ admite una integral completa de la forma

$$u = \alpha x + f(\alpha)y + \beta.$$

2 Si la ecuación es de la forma $p = f(x,q)$ admite una integral completa de la forma

$$u = \int^x f(s,\alpha)ds + \alpha y + \beta.$$

3 Si la ecuación es de la forma $p = f(u,q)$ admite una integral completa definida implícitamente por

$$\int^u \frac{ds}{f(s,\alpha)} = x + \alpha y + \beta.$$

4 Si la ecuación es de la forma $f_1(x,p) = f_2(y,q)$ admite una integral completa de la forma

$$u = \int^x \phi_1(s,\alpha)ds + \int^y \phi_2(s,\alpha)ds + \beta.$$

(*Indicación:*

1 Llamando $p = \alpha$, la ecuación da que $q = f(\alpha)$, entonces resulta $du = \alpha dx + f(\alpha)dx$. Basta integrar.

2 Obsérvese que tomando $q = \alpha$, la ecuación da la expresión $du = f(x,\alpha)dx + \alpha dy$. Intégrese

3 Del sistema característico se obtiene que $\frac{p'}{q'} = \frac{p}{q}$, es decir, $q = \alpha p$; de la ecuación resulta

$$\frac{du}{f(u,\alpha)} = dx + \alpha dy$$

4 Del sistema característico resultan

$$f_{1x} + f_{1p}\frac{dp}{dx} = 0,$$

$$f_{2y} + f_{2q}\frac{dq}{dy} = 0,$$

por tanto, $f_1(x,p) = \alpha = f_2(y,q)$.
Despejando p y q se tiene $p = \phi_1(x,\alpha)$, $q = \phi_2(y,\alpha)$, *de donde,*

$$du = \phi_1(x,\alpha)dx + \phi_2(y,\alpha)dy$$

y se concluye integrando)

17. Determínense las bandas características de las ecuaciones siguientes, calculando una integral completa por el método del problema 16.
a) $pq - x^2y^2 = 0$.
b) $p^3q^3 + px + qy - u = 0$.
c) $pq = 9u^2$.
d) $p = \operatorname{sen} q$.

18. Resuélvanse los problemas de Cauchy siguientes.

(a)
$$\begin{cases} pq + 1 - u = 0 \\ u = 2x + 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} pq - 3xy - 2u = 0 \\ u = 15y \\ x = 5. \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} p^2 + q^2 - 4u = 0 \\ u = y^2 \\ x = 0. \end{cases}$$

19. Clasificar las ecuaciones siguientes
a) $\cos^2 x u_{xx} - 2y\cos x u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$.
b) $(1+t^2)u_{tt} + (1+x^2)u_{xx} + tu_t + xu_x = 0$.
c) $u_{xx} + 2u_{yy} + 3u_{zz} + 2u_{tt} + 2(u_{xy} + u_{xz} + u_{xt}) + 4(u_{yz} + u_{yt}) + 6u_{zt} = 0$.
d) $u_{xx} + u_{xy} + u_{xz} + u_{xt} = 0$.
e) $u_{xx} + u_{zz} + 2u_{xy} + 2u_{xt} + 2u_{xz} + 2u_{zt} = 0$.
f) $y^2u_{xx} - u_{yy} = 0$.
Escríbase en forma canónica.

20. Transfórmese la ecuación

$$x^2 u_{xx} = y^2 u_{yy}$$

a variables características.

Como consecuencia probar que las soluciones son $u = f(xy) + xg(\frac{y}{x})$ con f y g funciones regulares arbitrarias.

21. Hallar las características de $(1+x^2)u_{xx} - (1+y^2)u_{yy} = 0$ y reducir la ecuación a forma normal.

22. Sean $f(t) = \operatorname{sen} t$ y $g(t) = \cos t$. Calcular la solución analítica del problema

$$u_{xx} = u_t \quad \text{con datos} \quad u(0,t) = f(t), \quad u_x(0,t) = g(t).$$

23. Sean $f(x) = e^{-x}$ y $g(t) = \operatorname{sen} x$. Calcular la solución analítica del problema

$$(1+x^2)u_{xx} - (1+y^2)u_{yy} = 0, \quad \text{con datos} \quad u(x,0) = f(x), \quad u_y(x,0) = g(x).$$

24. Considerar la ecuación cuasilineal

$$(x^2+1)u_x - yxu_y = \frac{u}{x}$$

y la curva dato $x = 1, \quad u = y$.

a) Comprobar si se cumple la condición de transversalidad.

b) En el caso que se cumpla, resolver el problema de Cauchy.

25. Considerar la ecuación cuasilineal

$$xu_x + yu_y = 2(x^2+y^2)u$$

y la curva dato $x = 1, \quad u = e$.

a) Comprobar si se cumple la condición de transversalidad.

b) En el caso que se cumpla, resolver el problema de Cauchy.